Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique

Caroline Bardini

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR DE MATHEMATIQUES
Ecole Doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines »

THESE
pour l'obtention du diplôme de

Docteur de l'UNIVERSITE PARIS 7
Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement le 10 Décembre 2003 par
Caroline BARDINI

LE RAPPORT AU SYMBOLISME ALGEBRIQUE : UNE APPROCHE DIDACTIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

Directeurs de thèse : Mme Michèle ARTIGUE et M. Michel SERFATI

JURY

Mme Michèle ARTIGUE	Directeur de thèse
Mme Brigitte GRUGEON-ALLYS	Examinateur
Mme Dominique GUIN	Rapporteur
M. Alain MICHEL	Rapporteur
M. Michel SERFATI	Directeur de thèse

A mes parents

REMERCIEMENTS

Personne ne se trompe autant que celui qui pense connaître toutes les réponses, sinon, peut-être, celui qui n'en sait qu'une seule. Ainsi, n'ayant pas l'illusion d'être le seul auteur de ce travail, qu'il me soit permis d'adresser mes plus sincères remerciements à tous ceux ayant contribué à l'édification de ce projet.

Ma plus vive reconnaissance va à Mme Michèle ARTIGUE et M. Michel SERFATI, qui ont accepté de co-encadrer le présent travail. Je les remercie tout particulièrement pour leur disponibilité exceptionnelle, leurs encouragements, ainsi que pour leur sincère soutien dont j'ai pu bénéficier au long de ces trois années. Je leur suis profondément reconnaissante de m'avoir fait découvrir le milieu passionnant et enrichissant qu'est celui de la recherche, et de m'avoir donné goût à la rigueur et à la précision. Nos rencontres fréquentes restent pour moi des moments d'une valeur inestimable ; ils se sont révélés incontestablement féconds tant pour l'évolution de mes travaux que pour le développement de ma personne.

Toute ma gratitude va également à Mme Dominique GUIN et M. Alain MICHEL, qui ont bien voulu rapporter cette thèse. Je leur sais gré pour leurs précieux conseils et les perspectives de recherches soulignés lors de l'exposé de ma soutenance. Que Mme Brigitte ALLYS-GRUGEON, membre du jury, soit également remerciée pour toute son attention portée à l'égard de mes travaux.

Je remercie aussi les enseignants, ainsi que leurs élèves, pour m'avoir chaleureusement accueillis dans leurs classes, en acceptant de participer à la phase expérimentale de mon étude. Un remerciement particulier va à l'élève de $4^{\text{ème}}$ qui a également bien voulu collaborer, avec sérieux et gentillesse, à l'expérimentation menée.

J'adresse une sincère reconnaissance aux différents membres de l'équipe DIDIREM (et ses jeunes chercheurs), ainsi qu'au personnel qui y est rattaché. Plus particulièrement, je remercie le soutien d'Eric, Emel, Kadir, Laurent, Mariam et Nuray et aussi celui d'Annie, Martine, Nadine et Nicole.

Je remercie également les thésards du bureau 5B1 avec qui j'ai eu la joie de partager l'évolution de mon cheminement dans le monde de la recherche. Un grand merci à Florent, Véronique et Vincent, pour leurs sourires, patience et soutien.

Finalement, je souhaite souligner ma profonde gratitude envers ma famille et quelques amis qui me sont très chers, véritables piliers dans la réalisation de ce projet. Je remercie très sincèrement mes parents, mon frère et ma sœur, pour leur respect, patience, écoute et soutien au long de ces années. Merci également à Arnaud et à Vincent, pour tous leurs efforts qu'ils ont consacrés pour atténuer les moments moins agréables qui sont apparus, de façon inévitable, au long de mes recherches. Je suis finalement très reconnaissante à Ghislaine et Alain, pour leur gentillesse constante et leurs accueils chaleureux.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

« Un symbole est, en somme, une comparaison prolongée dont on ne nous donne que le second terme »
Jules Lemaître

Dérivé du grec *sumbolon*, le terme *symbole* désigne un objet partagé en deux dont le rapprochement permet aux détenteurs de chaque partie, une fois celles-ci combinées, de se réunir ou de s'identifier comme membres d'une communauté. Plus exactement, un symbole est un « signe de reconnaissance, à l'origine un objet coupé en deux dont deux hôtes conservaient chacun une moitié qu'ils transmettaient à leurs enfants ; on rapprochait les deux parties pour faire la preuve que des relations d'hospitalités avaient été contractées. » [Dictionnaire historique de la langue française, 2000].

Si à l'origine étymologique du terme, lequel se définit essentiellement par ses fonctions, le symbole marque la réunion, le rassemblement de deux parties et signale l'appartenance, il révèle actuellement une multitude de significations, recouvrant des domaines aussi nombreux que variés.

La dispersion sémique du symbole est en partie liée à son étymologie, le verbe *sumballein*, « jeter ensemble, réunir », suggérant deux orientations distinctes à son interprétation. La première, concrète et dynamique, évoque un mouvement qui assemble et qui réunit. C'est, comme l'observe René Alleau (1996), le sens attribué à *sumbola*, trouvé chez Pausianas, pour désigner « l'assemblée des eaux » : lieu où elles se jettent, se réunissent et coulent ensemble. La seconde, statique et effectuée, est précisément la conséquence de la réunion et évoque le lien des parties assemblées ; c'est notamment la fonction du *credo*, symbole de reconnaissance des Apôtres, mais c'est également la fonction du drapeau, permettant le ralliement de soldats.

Le symbole peut également, hormis sa dimension de reconnaissance, avoir une valeur de correspondance analogique. On retrouve une telle fonction lorsqu'il concrétise, sous forme d'image, une idée abstraite ; c'est le cas du sceptre, symbole de la royauté, ou de la colombe, symbole de la paix.

Finalement, le symbole peut être dit conventionnel[1], comme c'est le cas des signes utilisés par les logiciens et les mathématiciens ou ceux retrouvés dans d'autres domaines scientifiques.

Cependant, quelle que soit la « nature » du symbole, celui-ci n'a de valeur que pour le groupe, pour la société. Selon Ortigues (1984), en effet, le symbole n'a de signification que par l'intermédiaire de la structure sociale et à ce propos Alain Caillé (1998) rajoute : « les hommes font société et ne

[1] Cet adjectif, repris par René Alleau et appliqué tout au long de son ouvrage doit ici être compris au sens premier du terme : un symbole est dit conventionnel en ce sens que son adoption par la communauté résulte d'un accord (implicite ou explicite) des membres de celle-ci. L'histoire de l'évolution de certains symboles scientifiques a, du reste, déjà fait preuve de leur caractère non arbitraire.

deviennent sujets que liés par des symboles ». La dimension sociale du symbole, omniprésente dans ses diverses « traductions », va donc être rapidement prise en compte par les sciences humaines, qui s'intéressent à préciser la fonction du symbole et à définir les possibilités d'interprétation.

Tandis que les sociologues et les ethnologues s'intéressent, dans un cadre plus large, à l'articulation entre symbole et société, à l'étude de la fonction sociale des symboles, d'autres sciences viennent privilégier une caractéristique spécifique du symbole en tant qu'outil d'une société : le symbole en tant que langage. Plus précisément, ce sont les linguistes qui, parmi les sémiologues, vont s'emparer de cette dimension du symbolisme, distinguant le symbole des autres signes tels l'indice, la trace ou l'icône, par la relation que celui-ci entretient avec le signifié, en étudiant le symbole comme système de communication.

La fonction symbolique est en effet de nos jours perçue comme étant étroitement liée à l'usage du discours, l'apparition du jeu symbolique chez l'enfant coïncidant, d'après les théories piagétiennes, avec l'apprentissage du langage. L'être humain semble ainsi se distinguer des autres par sa capacité symbolique ; René Alleau le caractérise même d' « animal symbolisant ». Si cette dimension est au cœur même de nombreuses études psychologiques, l'étude du développement de la capacité symbolique déborde le seul cadre des sciences humaines et fait actuellement l'objet de nombreuses recherches en neurosciences, notamment à travers les travaux du neurobiologiste Francisco Varela.

Outre la fonction symbolique, l'interprétation symbolique s'avère également à l'origine de diverses études, dont les domaines se veulent tout aussi variés. En effet, si la dimension sociale du symbole et le rôle que celui-ci joue dans la constitution d'une communauté ont été appréhendés par les études de nature sociologique, ethnologique ou psychologique, d'autres sciences se sont intéressées, de façon plus indirecte cependant, à la relation entre le symbole et la société. C'est ainsi que nous retrouvons chez quelques historiens des études de l'évolution de certains symboles à travers le temps, dans lesquelles les différentes représentations d'une même idée sont notamment examinées. Le souci de décoder le symbole, de cerner son sens caché, de l'interpréter donc, a également fait objet de plusieurs théories psychanalytiques, notamment à travers les travaux de Freud, qui a mis en avant l'aspect imagé et le contenu émotionnel du symbole en étudiant plus particulièrement le rêve et son interprétation symbolique.

Si l'on reprend la catégorisation des fonctions du symbole suggérée plus haut, nous pouvons dire que l'ensemble des domaines de recherche cités jusqu'ici prennent essentiellement en compte, dans leurs études, le symbole en tant que moyen de reconnaissance ou encore qu'ils traitent celui-ci plutôt sous sa dimension analogique. Or, s'il est un caractère symbolique dont l'importance, de par la diversité des champs d'applications, ne peut être négligée, c'est bien le volet conventionnel. En effet, les symboles de cette nature constituent la plupart des nomenclatures scientifiques et ce depuis les premières apparitions de celles-ci. Une des premières symbolisations dans ce domaine a été celle des anciens alchimistes, mais nous la retrouvons également dans les ouvrages de biologie, sciences physiques et, bien évidemment, en mathématiques.

La part qu'occupent les symboles dans la constitution de cette dernière science est, en effet, bien repérée, le sens commun allant bien souvent jusqu'à postuler l'inexistence de celle-ci sans ceux-là. Bien que quelques études menées en histoire des sciences contiennent une certaine mise en garde par rapport à cette conception jugée trop catégorique, en indiquant que le développement du raisonnement mathématique et la représentation symbolique peuvent être, par moments, dissociés, le lien entre les symboles et l'*invention mathématique* reste incontestablement très étroit, comme le montrent notamment certaines études épistémologiques, telles celles menées par Michel Serfati.

Corrélativement à la diversité sémantique du terme, se dresse ainsi un éventail de domaines où le symbole -son évolution, son interprétation et sa fonction sociale- sont au coeur des études, indiquant par là même non seulement l'importante part que celui-ci occupe dans la constitution d'une communauté mais également l'intérêt de l'analyse du rapport, *lato sensu*, au symbolisme. De ce fait et compte tenu du rôle capital que jouent les symboles dans la constitution des mathématiques, il nous a semblé indispensable, en tant que didacticienne de cette discipline, de prendre en compte dans nos recherches le volet symbolique des mathématiques en nous intéressant plus précisément aux symboles algébriques, non seulement parce que le rapport au symbolisme algébrique joue, en effet, un rôle essentiel dans le processus de l'apprentissage au sens large du terme, mais parce que la maîtrise du symbolisme algébrique se révèle également indispensable à une bonne maîtrise des mathématiques.

En effet, à l'issue de nos recherches menées dans le cadre du DEA en didactique des mathématiques [Bardini, 2001], s'est dégagée l'importance d'une étude approfondie relativement au rapport des élèves au symbolisme algébrique. En examinant le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième, il s'est avéré que la factorisation polynomiale, qui occupe une place non négligeable parmi les notions mathématiques étudiées en fin de Troisième, constitue pour la plupart des élèves un monde clos et fragile, comme le soulignait déjà J. Tonnelle (1979). Pour la majorité des élèves en effet, la factorisation reste une manipulation algébrique dépourvue de sens, bien (trop) souvent effectuée à l'aveugle, la faculté à mener à bien cette opération étant entièrement dépendante de la complexité des expressions proposées. Le constat de la fragilité du rapport des élèves à ce type de tâche, laquelle se constitue essentiellement de manipulations formelles, nous a donc conduit à nous interroger sur le rapport des élèves aux expressions algébriques. Comment les élèves perçoivent-ils les expressions algébriques qu'ils manipulent ? Plus exactement, comment les élèves perçoivent-ils les différents éléments constitutifs de telles expressions ? En somme, quel est le rapport des élèves au symbolisme algébrique et comment celui-ci évolue-t-il tout au long de leur scolarité ?

L'importance de l'écriture algébrique dans l'enseignement des mathématiques a déjà été soulignée par divers didacticiens, faisant objet de plusieurs travaux en didactique de l'algèbre.

A l'origine du développement de notre problématique de recherche se trouve donc l'étude de différentes études menées en didactique de l'algèbre. Dans un premier temps, dans l'optique d'analyser les différents cadres théoriques employés susceptibles de charpenter notre étude, nous ne nous sommes pas limités aux travaux directement liés au symbolisme algébrique, mais nous nous sommes intéressés plus largement aux différentes recherches menées en didactique de l'algèbre. A travers un premier examen, nous avons constaté que bon nombre d'auteurs sous-tendent leurs recherches par une analyse historique de l'algèbre, en lui réservant divers usages. Nous introduirons notre travail en proposant une synthèse, dans le premier chapitre, des différents usages de l'histoire des mathématiques, notamment à travers l'analyse des travaux de Anna Sfard (1991, 1994) et Carolyn Kieran (1996) qui s'en servent pour modéliser les différentes étapes de construction des concepts mathématiques ou encore à travers les recherches menées par Luis Radford (1996) et Harper (1987) pour lesquels l'histoire présente, entre autres, un intérêt méthodologique dans la conception de séquences d'enseignement et dans l'analyse des productions d'élèves.

Après avoir ainsi dessiné un panorama général, nous nous sommes intéressés aux travaux se rapprochant davantage de notre problématique, *i.e.*, ceux ayant pour objet d'étude les signes et symboles mathématiques, qu'ils soient ou non inscrits, désormais, dans le cadre des recherches en didactique de l'algèbre. A l'issu de cet examen, nous avons constaté que si bon nombre des travaux prennent appui sur la sémiotique, il n'est pas rare de retrouver, parmi les écrits en didactique des mathématiques, un renvoi à divers textes philosophiques de Gottlob Frege, rassemblés dans *Ecrits logiques et philosophiques* (1971) et plus précisément aux notions de *sens* et *dénotation* qu'il introduit. Le second chapitre de notre travail a donc pour objectif d'examiner le rôle du symbolique dans ces travaux didactiques, en nous appuyant notamment sur les recherches de Duval (1988, 1995), Drouhard (1992) et Arzarello (2001). Nous y présenterons également les travaux d'Arcavi (1994) qui ne font pas directement référence aux termes définis par Frege, mais où nous retrouvons une analyse relative aux *sens* des symboles mathématiques et plus précisément aux différents « sens » que les élèves attribuent à ceux-ci.

Cette seconde période de notre travail de recherche nous a montré que, si l'histoire de l'algèbre, présente dans de nombreux travaux didactiques, s'est révélée un puissant outil pour l'analyse du rapport des élèves à l'algèbre, elle n'est point suffisante. En effet, plus les travaux didactiques raffinaient leurs analyses sur le symbolisme, plus l'importance d'une analyse épistémologique était ressentie, celle-ci passant désormais très souvent au premier plan. Ainsi, si nous voulions analyser le rapport des élèves au symbolisme algébrique, il nous est apparu incontournable d'approfondir notre recherche à travers l'examen épistémologique de l'algèbre et de ses constituants.

Pour cela, nous nous sommes proposés de compléter l'analyse relative au termes frégéens de *sens* et *dénotation*, à travers la mise en perspective de différents écrits philosophiques qui nous sont apparus comme des références incontournables dans l'étude de l'algèbre ; ceci devrait nous offrir de nouvelles perspectives pour raffiner notre questionnement didactique relatif au symbolisme algébrique. Ce panorama, objet du troisième chapitre de ce manuscrit, sera abordé à travers l'exposé, dans un premier temps, de réflexions proposées par Jules Vuillemin (1962) et Gilles-Gaston Granger (1994) dans leur projet commun de l'élaboration d'une nouvelle perspective croisée entre science et philosophie. Nous évoquerons ensuite l'ouvrage, unique en son genre, de Désiré André (1909), lequel semble formaliser une idée intuitivement présente chez de nombreux mathématiciens relative au caractère *élégant* de l'écriture mathématique. Nous rassemblerons aussi, dans la quatrième section, quelques écrits nous ayant paru fondamentaux dans cette mise en perspective, en évoquant notamment les travaux de Charles Babbage (1821) et de Marcelo Dascal (1978). Nous conclurons ce panorama en évoquant une oeuvre qui, bien que ne relevant pas d'une analyse philosophique, s'avère une référence incontournable dans bon nombre d'études relatives aux symboles mathématiques : *A History of mathematical notations,* de Florian Cajori (1928).

Certes G-G Granger analyse, à travers son article portant sur la philosophie et les mathématiques leibniziennes, la pensée symbolique (ou *aveugle*, reprenant le terme Leibnizien) dont nous nous servons en algèbre. Certes, également, nous retrouvons dans ses écrits une réflexion menée autour des réquisits des systèmes de communication symbolique, dont le symbolisme logico-mathématique. Cependant le discours constituant ses travaux (et il en va de même pour la plupart des travaux épistémologiques précités) relève plutôt d'une réflexion philosophique générale que d'une pensée épistémologique spécifique des formes.

Dans l'optique d'approfondir notre réflexion épistémologique relativement aux symboles algébriques, nous nous sommes intéressés aux travaux de Michel Serfati qui, dans le cadre de sa thèse de doctorat en philosophie intitulée *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, présente, par le biais de l'examen de l'évolution historique de l'écriture symbolique, une étude épistémologique de la constitution de celle-ci, en explicitant en quoi elle « a décisivement contribué à l'invention en mathématiques même ». M. Serfati y propose un découpage de l'organisation de l'écriture symbolique en six volets, dénommés *figures de la représentation*. En empruntant les termes de M. Serfati, ce sont : la représentation du requis, celle du donné, celle des instructions opératoires élémentaires, de l'enchevêtrement des instructions, enfin de la mise à égalité et de la représentation des concepts composés. Cette minutieuse analyse des éléments atomiques des expressions algébriques, pivot de notre thème de recherche, s'est ainsi révélée particulièrement adaptée à notre problématique ; nous la décrivons dans la première partie du quatrième chapitre de notre travail.

Enrichie par l'examen de nature épistémologique de l'analyse des symboles algébriques, notre problématique s'est trouvée naturellement évoluer, portant désormais non plus uniquement sur le rapport des élèves au symbolisme algébrique, mais sur l'articulation entre didactique et épistémologie, relativement au rapport au symbolisme. A travers l'examen des travaux menés en didactique de l'algèbre, d'une part, et en épistémologie, de l'autre, il nous a semblé en effet que ces deux champs de recherche, se trouvant dans une situation d'éloignement de par leurs objets d'étude différents et leur méthodologies d'analyse, se rencontraient sous une même problématique : le rapport au symbolisme. Il s'agissait alors désormais, pour nous, d'étudier les relations entre la didactique des mathématiques et l'épistémologie en ce qui concerne la construction des symboles algébriques en abordant notamment, dans un premier temps, les questions suivantes : comment ces deux champs de recherche peuvent-ils s'articuler autour d'un même questionnement? Quels éléments l'épistémologie peut-elle apporter aux analyses didactiques menées à propos des symboles algébriques ? Plus précisément, en reprenant le découpage de l'organisation de l'écriture symbolique proposé par M. Serfati et en analysant les travaux didactiques ayant trait aux différentes « figures », quels liens peut-on établir ; y retrouve-t-on en particulier des résonances ?

En vue d'aborder ces différents questionnements, nous avons alors procédé à une lecture épistémologique des travaux didactiques menés dans le domaine du symbolisme, nous servant comme grille de lecture du découpage des figures de la représentation proposé par M. Serfati. Cette analyse, présentée dans la seconde partie du chapitre IV, a consisté à mettre en regard, pour chaque figure de la représentation, les travaux didactiques associés. Elle nous a notamment permis de déceler parmi quelques réponses d'élèves, des modes de raisonnement similaires à ceux mis en évidence par les travaux théoriques.

La double contribution, didactique et épistémologique, a également trouvé son application dans la dernière partie de notre travail, de nature expérimentale. Il s'agissait désormais, en effet, non plus de raffiner les analyses didactiques existantes à partir des études épistémologiques mais plutôt de construire des situations, dans le cadre du symbolisme algébrique, qui se voudraient produit de l'alliance entre didactique et épistémologie. Ainsi, après avoir étudié l'apport de l'épistémologie aux études didactiques de certaines productions d'élèves, nous nous sommes proposés d'approfondir cette analyse en suggérant des tâches susceptibles d'enrichir les connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme, objet de notre problématique initiale. En d'autres mots, il s'agissait de créer des situations qui se veuillent non seulement représentatives des idées épistémologiques décrites dans la première partie de notre travail, mais qui soient aussi susceptibles de nous permettre de mieux cerner et maîtriser le rapport des élèves au symbolisme. Ce travail, de nature expérimentale, s'est déroulé en deux temps : après avoir décrit et analysé les situations proposées en mettant en exergue les liens entre chaque activité et les éléments épistémologiques sur lesquels notre recherche s'appuie, nous avons analysé, en tenant compte des idées théoriques développées par ailleurs, les réponses d'élèves de classe de $4^{ème}$ et 2^{nde} auxquels certaines de ces activités ont été proposées.

Les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses données par les élèves aux différents exercices proposés ont, entre autres choses, révélé l'importance de certaines variables didactiques de ceux-ci (notamment la complexité des expressions algébriques en jeu). Se dessinait ainsi un prolongement possible de notre travail qui nous semblait pouvoir être amorcé à travers une identification plus systématique de ces variables et l'étude de leurs effets. L'analyse approfondie de certains types de tâches et du niveau de complexité des expressions qui les composent a, par ailleurs, suscité l'intérêt de chercheurs en EIAH qui, travaillant sur la modélisation et le développement d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage de l'algèbre (projet *Lingot*), ont perçu dans cette analyse un point d'appui qui pouvait leur permettre de générer de façon automatique un ensemble de tâches susceptibles d'être proposées à des élèves dans un environnement informatique. C'est donc ainsi que nous avons été amenés à étudier, de façon détaillée, les variations qui peuvent être envisagées à propos de certaines expressions algébriques. L’exposé de cette analyse et son application dans l’environnement informatique feront l’objet du dernier chapitre de ce manuscrit.

Ainsi, sur un mode analogue à celui de la constitution d'un symbole, le présent travail s'est-il caractérisé par l'assemblage de deux domaines de recherche. Tout au long des pages qui suivront, nous invitons le lecteur à découvrir les intérêts multiples, qu'ils soient établis sur le plan théorique ou expérimental, que nous avons trouvé à une telle conjonction et que nous avons veillé à dégager.

CHAPITRE I – DIFFERENTS USAGES DE L'HISTOIRE DANS LA DIDACTIQUE DE L'ALGEBRE

Les recherches en didactique des mathématiques, par leur objet même d'étude, sont le plus souvent caractérisées par une analyse systémique des relations professeur-élèves par rapport à un savoir mathématique. La didactique diffère en ce sens de la pédagogie dans la mesure où son objet d'étude ne se limite pas à la relation enseignant-enseigné ; celle-ci est sous-tendue par une troisième (et essentielle) composante : le savoir. Comme le définit Chevallard (1991) :

> « Le didacticien des mathématiques s'intéresse au jeu qui se mène – tel qu'il peut l'observer, puis le reconstruire, en nos classes concrètes – entre un enseignant, des élèves et un savoir mathématique » [Chevallard, 1991, p.14].

Chevallard se sert de ce « triangle didactique » pour analyser l'évolution du savoir mathématique en question (c'est ce qu'il dénomme la **transposition didactique**), depuis son « apparition » au sein de la communauté scientifique (ceci correspond alors au savoir savant) jusqu'à la forme qu'il adopte lorsqu'il est enseigné (le savoir enseigné).

Or ce savoir, avant même d'être admis par la communauté scientifique, a lui aussi subi plusieurs transformations ; il a évolué tout au long de son édification –une évolution qui se veut d'ailleurs rarement linéaire, combinant bien souvent des périodes de questionnements, stagnations et progrès. Toute cette « genèse » du savoir mathématique n'est pas sans intérêt pour les didacticiens. D'après J. L. Dorier (1997) :

> « (…) une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné » [J.L. Dorier, 1997, p.7].

Si Dorier entrevoit l'usage de l'histoire des mathématiques dans les recherches didactiques, celui-ci ne se fait pas sans précautions. Même si Piaget et Garcia (1989) ont, dans le passé, établi quelques liens entre le développement historique et psychologique, ces évolutions ne peuvent pas être directement transposées : l'évolution historique d'un concept est un guide, plutôt qu'une série de faits à projeter tels quels en classe. C'est un avis partagé par la majorité des didacticiens :

> « Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse » [Artigue, 1991, p.244].

Si l'usage de l'histoire dans l'enseignement se fait trop souvent aux marges des manuels scolaires (en guise d'introduction d'un concept, dans un cadre visant plutôt à élargir la culture générale de l'élève), son utilité a déjà été soulignée dans différents travaux de didactique des mathématiques. Plus précisément dans le cadre des recherches en didactique de l'algèbre, quatre auteurs nous semblent représentatifs de la diversité de l'emploi de l'histoire des mathématiques rencontrée en didactique. Nous présenterons dans les paragraphes qui suivent la contribution de l'histoire de l'algèbre dans les travaux de Kieran (1996), Sfard (1991, 1994), Harper (1987) et Radford (1996) en soulignant les différences et les similitudes de ces différentes approches.

I.1 - L'histoire de l'algèbre et les travaux de Kieran

C'est dans le but de dresser une analogie entre l'évolution de certains concepts algébriques au travers de leur histoire et leur apprentissage (sans pour autant, nous le soulignons, vouloir faire de celle-là le modèle de celui-ci) que Kieran (1996) entrevoit une approche historique de l'algèbre, en soulignant deux usages fondamentaux de l'histoire.

L'histoire lui sert tout d'abord de cadre permettant d'analyser les situations qui furent à l'origine de la création du raisonnement algébrique:

> « The glimpse that we take of the historical evolution of algebra (…) permits us to make explicit some of the key ideas in the development of algebra and provides us with indicators of change that signaled the transition to a mode of algebraic thinking » [Kieran, 1996, p.5].

Kieran affirme que cette transition vers un raisonnement algébrique est aussi présente dans l'enseignement et observe que le saut conceptuel le plus important pour les étudiants lors de la résolution de problèmes se situe justement au passage du **mode de raisonnement arithmétique** au **mode algébrique.** Afin de mieux comprendre les principales caractéristiques de chaque mode de raisonnement, nous nous appuierons sur les recherches de Bednarz et Janvier (1996) concernant l'émergence et le développement du raisonnement algébrique lors de la résolution de problèmes.

Prenons un exemple représentatif, selon Bednarz et Janvier, des problèmes proposés aux élèves en algèbre : *Trois enfants jouent aux billes. Ils possèdent à eux tous 198 billes. Georges a 2 fois plus de billes que Denis et Pierre a 3 fois plus de billes que Georges. Combien de billes possède chaque enfant* ? Bednarz et Janvier proposent le schéma suivant pour représenter la structure sémantique du problème :

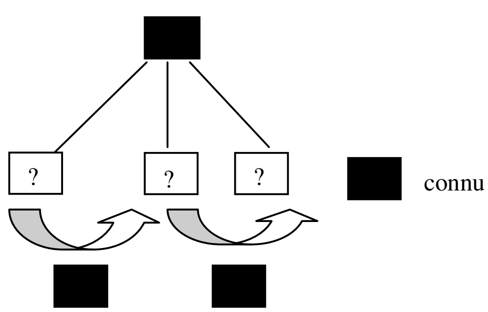


Fig. 1 - Structure du problème des billes – structure représentative des problèmes algébriques fréquemment proposés aux élèves

Le nombre total de billes –connu- est représenté par le carré noir au sommet de la figure.
Le nombre de billes que chaque enfant possède –inconnu- est représenté par les carrés où figurent des points d'interrogation ; sont représentés, de gauche à droite, les avoirs respectifs de Denis, Georges et Pierre.
Les rapports –connus- liant le montant de billes que possèdent deux enfants représentés consécutivement sont désignés par les carrés noirs, sous les flèches relatives aux transformations (ex : multiplication par 2 sous la flèche de gauche).

Ce type de problème diffère des problèmes arithmétiques dans la mesure où, employant les termes de Bednarz et Janvier, il se veut « non connexe » (*disconnected*). Pour les problèmes arithmétiques, il est « facile » d'établir un lien entre des connues du problème permettant une telle progression vers la solution. De cette façon, l'élève n'est pas obligé de prendre en compte les trois données en même temps : d'un état initial donné, il peut obtenir des états intermédiaires qui lui permettront de déterminer la troisième quantité. C'est ce que nous observons dans le schéma ci-dessous :

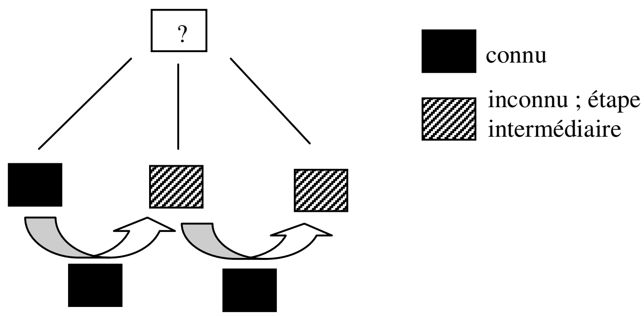


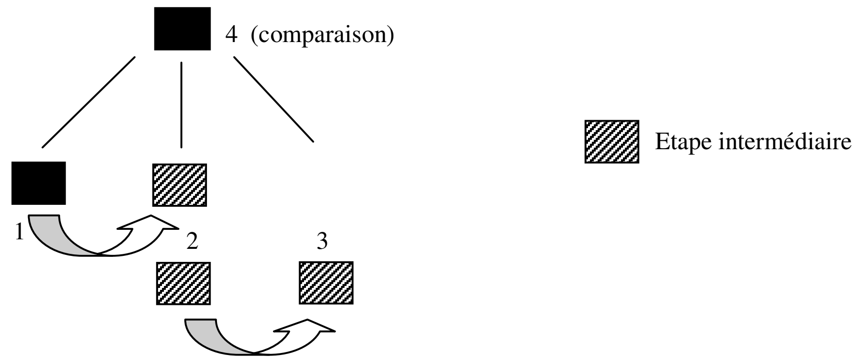
Fig. 2 - Structure des problèmes arithmétiques fréquemment proposés aux élèves

Le montant « initial » (en analogie avec le problème de billes) ici inconnu et à déterminer, est représenté par le carré avec le point d'interrogation. Seules la première valeur (parmi celles désignées par les trois carrés alignés) et les relations (représentées par les flèches et carrés noirs) entre deux valeurs consécutives sont connues. A partir de la première valeur et de la première relation, l'élève déduit la deuxième valeur puis, se servant de la deuxième relation, calcule la troisième. En regroupant les trois valeurs, il en déduit le total.

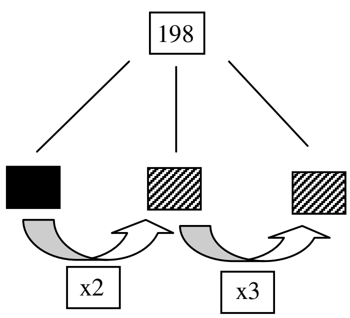
Ce n'est cependant pas ce que l'on observe dans le problème de billes représenté dans la fig.1. Dans ce cas, aucune connexion ne peut être directement établie entre les valeurs connues du problème. Pourtant, certains élèves peuvent traiter ces problèmes « non connexes » en employant un raisonnement arithmétique. Parmi les quatre types de raisonnement arithmétique décelés par Bednarz et Janvier intervenant dans la résolution du problème de billes, nous décrirons celui où l'élève fait appel à des étapes intermédiaires car il nous semble étayer le schéma qui décrit la structure des problèmes arithmétiques (aller du connu vers l'inconnu) présenté ci-dessus.

L'élève qui a ce profil choisit une valeur fictive pour une des inconnues (c'est son point de départ) à partir de laquelle il déduit les deux autres, en respectant l'ordre donné des relations. Une fois qu'il a trouvé le nombre de billes que possède le troisième enfant, il regroupe les trois valeurs trouvées (dont une prise au hasard) et compare la somme des trois avec 198. Si ces deux dernières sont différentes, l'élève choisit une autre valeur fictive pour une des inconnues, et ainsi de suite[1]. La résolution que nous venons de décrire peut se schématiser comme suit :

[1] Cette stratégie se trouve systématisée dans la *méthode de la fausse position*, utilisée depuis 2000 avant J.-C. (on la retrouve notamment dans les papyrus de Rhind et de Moscou) et reprise par les mathématiciens chinois, indiens et finalement par les mathématiciens occidentaux du XVème siècle. Cette méthode qui fut d'ailleurs pendant longtemps l'objet d'enseignement dans les classes de mathématiques n'est plus actuellement au



Ce type de résolution diffère de la méthode employée dans un raisonnement algébrique dans la mesure où, pour celui-ci, la valeur initiale est fixée par une lettre (il faut cependant tout d'abord se rendre compte qu'il existe une valeur qui génère toutes les autres), l'on fait « comme si » sa valeur était connue et on travaille « de façon linéaire » tout le long du diagramme :



Soit a le nombre de billes que possède Denis (la valeur initiale est fixée).
Le nombre de billes que possède Georges est : 2a.
Le nombre de billes que possède Pierre est : 3 x 2a.

a+2a+(3x2a) = 198 (toutes les données du problème sont réunies)
9a = 198
a = 198/ 9 = 22
Denis possède 22 billes, donc Georges en a 44 et Pierre 132.

Il peut nous sembler, à première vue, que les élèves qui procèdent par essais successifs (qui appliquent le raisonnement arithmétique que nous avons décrit plus haut) sont très proches du raisonnement algébrique. Or ce n'est pas le cas, comme nous l'expliquent Bednarz et Janvier:

> « (…) in one case (numeric trials), one operates in a sequential manner on the states, going through intermediate states, and there is no necessity to link the third state to the first one which generates it. In the other case (algebraic reasoning), the three states are tackled together in the equation. » [N. Bednarz et al., 1996, p.129].

L'analyse de Bednarz et Janvier leur permet, d'après elles, de mieux comprendre les changements nécessaires lors du passage de la résolution de problèmes « arithmétiques » aux problèmes « algébriques » par les élèves. A ce propos, Kieran affirme que les traces de cette transition peuvent être repérées tout au long de l'histoire: «(…) history shows us that access to the analytic mode of problem solving, in contrast to the synthetic that was used prior to this, took time to be introduced » [Kieran, 1996, p.6].

L'histoire contribue non seulement, d'après Kieran, au repérage d'obstacles dans l'enseignement de l'algèbre (surtout en ce qui concerne la transition entre les différents modes de raisonnement chez les élèves) mais son analyse permet également de déceler les différentes étapes de

programme, mais parait toutefois dans quelques manuels scolaires pouvant notamment servir de point de départ pour l'enseignement d'une méthode d'approximation successive.

construction d'un concept. L'analyse historique de la notion de variable est en ce sens fondamentale non seulement pour estimer la complexité de ce « concept »[2] et toutes les percées ayant eu lieu lors de son édification mais également pour cerner la question didactique de l'articulation entre ce « concept » et celui d'inconnue :

> « (…) the conceptions underlying the notions of variable are related to situations whose aims and intentions are essentially different from those related to the concept of unknown (establishing relations between numbers vs. solving problems). The historical analysis leads to the didactic question of the articulation between these two essential components of algebra learning – between an approach emphasizing generalization and the construction of formulas where the symbolism takes on the sense of generalized number and an approach focusing on problem solving where the symbols represent unknowns » [ibid., p.6].

L'histoire des nombres négatifs qui, d'après Kieran, est au cœur du développement de l'algèbre, fournit également une grande quantité d'exemples d'obstacles épistémologiques qui nous permettent de mieux nous rendre compte des difficultés sous-jacentes aux pratiques du raisonnement algébrique. De manière générale, l'étude d'un évènement historique impliquant une rupture ou un changement de modèles et langages s'avère, selon Kieran, très importante pour une bonne compréhension des difficultés des élèves. Elle souligne de même qu'il est possible d'apercevoir par le biais d'une étude historique les liens unissant le développement de l'algèbre et celui de la géométrie. Les travaux algébriques de Diophante, qui s'appuient notamment sur la tradition géométrique babylonienne (relative à une pratique de découpage et recollement) fournissent un bon exemple[3].

En conclusion, nous pouvons dire que Kieran s'intéresse à dévoiler les situations à l'origine de la création du raisonnement algébrique ou encore à repérer, toujours à travers une analyse historique, les obstacles susceptibles d'être rencontrés dans l'enseignement de l'algèbre. D'autres auteurs, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, nous découvrent un usage de l'histoire dans une perspective qui déborde le seul cadre de l'algèbre. Tel est le cas de Sfard qui s'intéresse aux différentes étapes de construction d'un savoir mathématique et qui s'en sert ensuite pour proposer un

---

[2] Kieran perçoit la variable comme étant un concept mathématique, mais en est-il vraiment un ? Nous reviendrons sur ce point ultérieurement, notamment au travers de l'étude épistémologique de ce terme.

[3] Un des problèmes caractéristiques de l'algèbre « ancienne », cultivée par la communauté de « mathématiciens » ayant affaire à des problèmes où intervenaient des figures géométriques, était celui qui consistait à trouver le côté d'un carré satisfaisant des conditions données (par exemple tel que la somme de sa surface et de son côté soit égale à ¾). La procédure envisagée consistait à projeter, à côté du carré, un rectangle dont l'une des dimensions vaut 1 et dont l'autre est égale au côté recherché du carré. L'algèbre mise en oeuvre pour résoudre ce problème est sous-tendue par la conservation (visuellement validée) des aires des figures après l'application de la procédure de découpage et recollement. Les égalités algébriques correspondent alors à des égalités entre des aires. Les méthodes algébriques employées lors de la résolution du problème sont essentiellement basées sur une séquence de transformations géométriques T_i, partant de la figure initiale F_1 et aboutissant au carré F_n dont l'aire est connue :

$F_1 \xrightarrow[T_1]{} F_2 \xrightarrow[T_2]{} \ldots \xrightarrow[T_{n-1}]{} F_n$ (pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se reporter à l'article de L. Radford intitulé *The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective,* paru dans [Kieran,1996]). Notons par ailleurs que l'analyse des procédures de découpage et recollement autrefois utilisées par les géomètres fait l'objet de divers travaux didactiques. Nous citerons principalement les travaux de A. Pressiat (2002) dans lesquels nous trouvons un questionnement profond relativement à la légitimité de l'intégration des méthodes de *complémentation* et de *décomposition* dans l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement dans la formation des professeurs de collège.

modèle décrivant les différentes étapes de l'apprentissage d'un concept mathématique. Même si Sfard s'intéresse aux savoirs mathématiques en général, la plupart de ses exemples s'inscrivent dans le domaine algébrique, ce pourquoi il nous a paru important de les faire figurer dans notre travail.

I.2 - L'histoire de l'algèbre et les travaux de Sfard

L'analyse historique de l'algèbre est un point de départ des travaux de Sfard (1991, 1994) qui la prend notamment en compte pour étayer la thèse d'antériorité de l'approche **opérationnelle** sur l'approche **structurale** des concepts mathématiques. Rappelons tout d'abord que Sfard décrit les aspects structuraux et opérationnels comme étant deux volets complémentaires (non point mutuellement exclusifs) d'une même notion mathématique. D'après Sfard, les concepts mathématiques peuvent être vus en tant qu'objets (ce qui correspond alors à l'aspect structural) et elle affirme:

> « Seeing a mathematical entity as an object means being able of referring to it as if it was a real thing – a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details » [Sfard, 1991, p.4].

D'un autre côté, interpréter une notion mathématique comme un processus (c'est-à-dire adopter une approche opérationnelle) c'est percevoir, à l'intérieur d'une séquence d'actions, sa dynamique plutôt que travailler sa « forme » actuelle. Reprenant les termes employés par Sfard, nous pouvons dire que tandis que le volet structural du concept mathématique est statique, instantané et intégral[4], le côté opérationnel est dynamique, séquentiel et détaillé.

Cette dualité des concepts mathématiques peut être repérée tout au long de l'histoire de l'algèbre et est également présente, comme nous l'explique Sfard, dans la formation des notions mathématiques chez les apprenants. C'est notamment le cas du concept de « nombre ». La signification de ce mot fut très longtemps liée à ce qu'on appelle aujourd'hui les « nombres naturels », dont l'origine est le processus de dénombrement. Le rapport de deux entiers fut également d'abord perçu en tant que description du processus de mesurage avant de se voir accordé le statut de nombre. De même, quelques recherches[5] semblent indiquer la tendance de certains élèves à interpréter le rapport de deux entiers plutôt en tant que processus qu'en tant que nombre :

> « Incidentally, some traces of purely operational approach to rationals were noticed by researchers (Carpenter et al., 1980) also in today's 13-years-old students, 50 percent of whom were found unable "to represent a division like 7 divided by 4 as a fraction" » [ibid., p.11].

---

[4] On pourrait le qualifier kantiennement de « synthétique *a priori* ».

[5] Carpenter et al., 1980, "Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school", *The Mathematics Teacher* **73**(5), 329-338.

Selon Sfard, ces élèves perçoivent la division de deux entiers uniquement comme un processus et sont incapables de l'interpréter comme une entité statique. Pendant très longtemps, les nombres intervenaient essentiellement dans des contextes liés au processus de mesurage. Ce ne fut notamment pas sans étonnement que les pythagoriciens découvrirent qu'il n'est pas possible d'employer le processus « habituel » pour calculer la longueur de la diagonale de certains carrés; beaucoup de temps s'écoula et beaucoup d'obstacles furent à surmonter jusqu'à accepter le fait que la mesure de n'importe quel segment représente un nombre, même si celle-ci ne peut être exprimée de façon « habituelle » (c'est-à-dire en établissant un rapport entre deux entiers)[6]. Finalement, l'ensemble des nombres fut agrandi au-delà des entiers et des fractions, pour inclure les nombres positifs irrationnels, cette démarche étant à l'origine de nouveaux processus de calcul et par la suite d'autres types de nombres. Sfard résume cette analyse historique de l'évolution de la notion de nombre en la décrivant comme un processus cyclique:

> « (…) the history of numbers has been presented here as a long chain of transitions from operational to structural conceptions: again and again, process performed on already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or *reified* (from the latin *res* – a thing), to become a new kind of self-contained static constructs » [ibid., p.14].

De même qu'elle distingue, à travers l'analyse historique, trois étapes tout au long du processus de formation d'un concept (dénommées **niveaux de structuralisation**), Sfard décompose le modèle d'apprentissage en trois niveaux :

> «(…) if the conjecture on operational origins of mathematical object is true, then first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into an autonomous entity should emerge, and finally the ability to see this entity as integrated, object-like whole must be acquired» [ibid., p.18].

Ce modèle lui sert de base pour décrire la construction d'autres concepts mathématiques, tels la notion de fonction. Sous un angle historique, Sfard résume l'évolution de cette notion comme suit :

> « (…) in 1755, (…) Euler suggested another definition (…) : "a quantity" should be called function only if it depends on another quantity "in such a way that if the latter is changed the former undergoes change itself". The operational flavor emanates from this description even more clearly than from the earlier version. » [ibid., p.15].

La deuxième étape de la construction de la notion de fonction se caractérisa, dans l'histoire, par une succession de tentatives de réification, et ce fut la définition présentée par Bourbaki qui, selon elle, mit fin à cette « lutte » (*struggle*) : « [his] simple description presented function as a set of ordered pairs and made no reference whatsoever to any kind of computational process » [ibid., p.15]. La réification du concept de fonction ne fut possible, d'après Sfard, qu'à partir du moment où la

---

[6] Voici notamment la conception de l'irrationalité de π au milieu du XVIIIème siècle d'après Lambert : « Démontrer que le diametre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'est là une chose, dont les géometres ne seront gueres surpris». J. H. Lambert in *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* (1761).

notion de variable n'intervint plus dans la définition, cédant sa place aux concepts essentiellement structuraux de la théorie des ensembles.

Sfard compare ensuite l'évolution historique de la notion de fonction avec la genèse de la construction de cette notion par les élèves en dégageant à nouveau trois niveaux[7]. Lors de la première phase (l'**intériorisation**), l'élève se familiarise avec les processus qui sont à la base du nouveau concept : « (…) it is when the idea of variable is learned and the ability of using a formula to find values of the "dependent" is acquired » [ibid., p.18]. C'est lors de la seconde étape (la **condensation**) que l'élève perçoit le processus comme un tout, et est capable de dresser des comparaisons ou encore de généraliser ce processus sans pour autant entrer dans les détails :

> « (…) the more capable the person becomes of playing with a mapping as a whole, without actually looking into its specific values, the more advanced in the process of condensation he or she should be regarded. Eventually, the learner can investigate functions, draw their graphs, combine couple of functions (…), even to find the inverse of a given function.» [ibid., p.19].

Cette seconde étape dure, d'après Sfard, tant que le nouveau concept reste lié à un certain processus. Dans le cas des fonctions, la troisième phase (la **réification**) se caractérise par trois éléments :

> « (…) reification may be evidenced by proficiency in solving equations in which "unknowns" are functions (differential and functional equations, equations with parameters), by the ability to talk about general properties of different processes performed on functions (such as compositions or inversion) and by ultimate recognition that computability is not a necessary characteristic of the sets of ordered pairs which are to be regarded as functions.» [ibid., p.20].

Ainsi, nous apercevons à travers les travaux de Sfard un usage de l'histoire des mathématiques qui diffère de celui de Kieran. Si celle-ci s'intéresse plutôt à l'évolution historique de concepts mathématiques particuliers, Sfard se sert essentiellement des analyses historiques pour dégager une structure (hiérarchisée) de la conceptualisation mathématique, valable *a priori* pour toute notion mathématique. Il convient d'observer que cette structure ternaire (intériorisation-condensation-réification), même si elle prend son origine dans l'histoire, s'en détache aussitôt et revêt un caractère a-temporel.

I.3 - <u>L'histoire de l'algèbre et les travaux de Harper</u>

Tandis que Sfard se sert de l'histoire pour analyser la structure des savoirs mathématiques (en s'appuyant notamment sur l'évolution historique de concepts tels ceux de nombres ou de fonctions), Harper (1987) s'intéresse plus précisément à comparer l'enchaînement de l'acquisition de concepts algébriques à l'intérieur du milieu éducatif, avec l'évolution de ces même concepts sur le plan

[7] Tout au long de ses travaux, Sfard précise que ce schéma à trois étapes doit être interprété comme une hiérarchie, c'est-à-dire qu'un niveau ne peut être accessible si toutes les étapes antérieures n'ont pas été franchies.

historique. Pour ce faire, Harper reprend le schéma historique de l'évolution de l'algèbre pour fournir une catégorisation des réponses d'élèves face à un problème algébrique donné[8] :

> « It is generally accepted by historians of mathematics that algebra has passed through three important stages : rhetorical, syncopated, and symbolic[9] (see for example, Boyer, 1968). "Rhetorical algebra" belongs to a period before Diophantus (circa 250 AD) when all arguments were written in longhand and no symbols were available to represent "unknowns". The second stage, syncopated algebra, extends from Diophantus through the end of the sixteenth century, and is exemplified by the algebraist's use of letters for unknown quantities. (…) At the turn of the seventeenth century however, all of this was to change. The third period of algebra, the "symbolic period" was heralded by the introduction by Vieta of the use of letters also for *given* quantities» [Harper, 1987, p.77-78].

Harper se sert de cette triple structure pour analyser les types de réponses données par les élèves, les répartissant selon trois différentes méthodes de résolution : la méthode rhétorique, diophantienne et « vietienne ». Parmi les conclusions issues de sa recherche, Harper montre (ou voudrait montrer) une tendance des élèves, tout au long de leur scolarité, à passer progressivement d'une résolution rhétorique à une résolution du type diophantien pour finalement aboutir à une méthode « vietienne » de résolution. Elle affirme :

> « Whatever the influence of teaching however it is of some interest that the three types of solution which can be identified in the history of mathematics are to be detected also in the pupil's responses. It is also interesting that the preference for solution type does appear to shift through Rhetorical to Diophantine to Vietan, and that the use of "givens" is adopted relatively late in school life (in the majority of cases) » [ibid., p.84].

Harper souligne que l'objectif de son étude n'est pas d'établir de lien servile entre séquence d'enseignement et développement phylogénétique mais suggère plutôt : « (…) teaching should recognise and attempt to prepare pupils for the various usages of letters which they will need to assimilate » [ibid., p.85]. L'apport de l'histoire à l'enseignement est, selon Harper, évident : « It requires little imagination to recognise that pupils will face similar difficulties and will be able to make similar advances as those mathematicians in history whose conceptual world they share. » [ibid., p.87]

I.4 - <u>L'histoire de l'algèbre et les travaux de Radford</u>

Si Harper, nous l'avons vu, se sert de l'histoire comme « grille d'analyse » de quelques productions d'élèves, Radford (1996) s'en sert non seulement pour étudier les réponses des élèves face à des problèmes donnés, mais emploie l'histoire des mathématiques également (et surtout) pour élaborer ceux-ci. Plus précisément, Radford s'inspire de l'histoire pour trouver des éléments qui lui

---

[8] Harper présenta à 144 élèves de « secondary grammar school » (répartis en 6 années successives) le problème résolu par Diophante dans *Arithmetica*, qui de nos jours peut s'écrire : *Si la somme et la différence de deux nombres quelconques sont données, montrez que vous pouvez toujours connaître la valeur de ces nombres.*

[9] Ce triple découpage, introduit par Nesselmann dans *Die Algebra der Griechen*, bien qu'il ait été repris par divers historiens et didacticiens (parfois sous d'autres termes), « manque de finesse » d'après M. Serfati, qui ne retient de ce découpage que le rhétorique et symbolique. C'est en effet un point de vue qui mérite d'être analysé plus en détail ; nous y reviendrons par la suite. Note de l'auteur.

permettront de bâtir des séquences d'enseignement favorisant une construction personnelle des idées algébriques dans un contexte de résolution de problèmes. Les travaux auxquels nous faisons ici allusion se rapportent plus particulièrement à l'introduction de symboles algébriques dans l'enseignement des mathématiques. Selon Radford : «(...) il y a une voie qui demeure encore peu explorée dans la recherche et dans l'enseignement : celle du rôle des symboles dans l'appropriation par l'élève des idées algébriques de base dans un contexte de résolution de problèmes verbaux » [Radford, 1996, p.254]. Derrière tout symbole se cache, selon Radford, une idée ; il n'existe pas, en quelque sorte, de « symbole de rien » : « (…) un symbole ("x" ou autre) est le symbole de quelque chose, d'une idée »[10] [ibid., p.254]. Ainsi, Radford s'intéresse à créer en classe des situations qui incitent les élèves à développer eux-même les idées sous-jacentes aux symboles, procédant ainsi à une construction personnelle de la relation symbole/ idée. Pour ce faire,

> « (...) il convient d'identifier les idées de base de l'algèbre, les voies d'accès qui permettent aux élèves de construire des représentations externes de plus en plus complexes, les actions permettant de déboucher sur une dialectique entre les idées et leurs symboles. En outre, mais c'est aussi important, il convient d'identifier les situations dans lesquelles les relations entre les idées ou les objets de connaissance et leurs symboles prendront forme. » [ibid., p.255].

C'est en faisant appel à l'histoire et plus précisément en analysant des documents historiques qui révèlent l'émergence du langage algébrique que Radford élabore les séquences d'enseignement. Une idée principale dégagée des textes historiques le guide notamment tout au long de son étude : « l'apprentissage de l'algèbre n'est pas lié seulement au développement de l'idée d'inconnue, mais aussi à l'utilisation des règles de base, c'est-à-dire de l'al-gabr et l'al-muqabala[11] » [ibid., p.273]. Il retient ainsi, d'une part de l'algèbre médiévale le fait que l'inconnue (alors dénommée « chose ») est une quantité « occulte »[12] à dévoiler à la fin du problème, et d'autre part de l'algèbre abaquiste que la connaissance algébrique fut avant tout un outil ou une technique. Les séquences d'enseignement proposées par Radford qui prennent en compte les éléments historiques viendraient combler une lacune présente dans l'enseignement actuel des mathématiques:

> « Il y a donc un décalage conceptuel très important entre la construction du savoir algébrique selon l'histoire et la construction qu'on exige des élèves en salle de classe. On peut même se demander si les échecs scolaires sont dus à l'absence de conceptualisations préalables qui pourraient aider l'élève à donner un sens aux idées de base » [ibid., p. 260].

Dans un souci de clarifier notre discours, nous proposons une brève description des séquences dont il est ici question ; nous invitons toutefois le lecteur à se reporter aux travaux de Radford pour une étude plus détaillée. Les séquences ont été réparties selon trois niveaux d'abstraction : un niveau concret, un niveau semi-concret et un niveau symbolique. Un des énoncés proposés aux élèves de

---

[10] Sfard partage cette idée : « Algebraic symbols do not speak for themselves. » [Sfard, 1994, p. 192].

[11] Ce sont des transformations (dont le nom figure dans le titre du traité d'al-Khwarizmi écrit à Bagdad vers 833) qui permettent de transformer des équations en complétant – ou en restaurant- et en enlevant des termes semblables de chaque membre de l'équation. En particulier, la règle d'al-muqabala (balancement) permet de supprimer un même nombre qui figure dans les deux membres d'une équation.

[12] D'après Antonio de Mazzinghi, mathématicien des XIIIème et XIVème siècles.

grade 9 (troisième année de secondaire) est : « *Alain a cinq bonbons et sa mère lui donne un sac de bonbons, ce qui lui fait vingt-trois bonbons en tout. Alors, combien y a-t-il de bonbons dans son sac ?* ». Dans le niveau concret, on propose aux élèves de résoudre le problème à l'aide d'un matériel concret (des sacs de papier contenant une quantité inconnue de bonbons que les élèves doivent découvrir et le dessin d'une balance à deux plateaux pour représenter l'égalité), la règle visée à employer pour résoudre ce problème étant celle de l'al-muqabala. Dans le niveau semi-concret, il est demandé aux élèves de représenter et résoudre le problème écrit en utilisant des dessins. Finalement, pour le dernier niveau, l'élève doit traduire le problème et le résoudre en utilisant des chiffres et des lettres. Intéressons-nous à présent sur les liens entre les éléments historiques que Radford a repérés et les choix effectués pour bâtir la séquence d'enseignement que nous venons de décrire.

Le choix de commencer la séquence d'enseignement par un niveau concret repose entre autres sur le fait que l'écriture la plus ancienne établissait un lien étroit entre l'objet et sa représentation et sur le fait que, d'après lui, les approches actuelles en termes de relation entre l'objet et sa représentation véhiculées par les manuels scolaires devraient « reposer sur une articulation didactique dans laquelle le symbole émergerait de l'objet lui-même et évoluerait dialectiquement en parallèle avec celui-ci pour ne s'en détacher que progressivement, jusqu'à pouvoir mener une vie autonome (du moins jusqu'à un certain point) »[ibid., p.260]. Il s'appuie en particulier sur un élément historique que nous avons cité plus haut : la désignation de l'inconnue dans l'algèbre médiévale. La « chose », nous avons vu, représentait pour les mathématiciens de l'époque une quantité occulte qu'il s'agissait de déterminer. C'est ainsi qu'il choisit de représenter, au niveau concret, le concept d'inconnue dans la séquence d'enseignement des sacs par une véritable quantité cachée : « (...) on a utilisé au départ des sacs de papier contenant une quantité inconnue de bonbons que les élèves devaient découvrir d'après l'énoncé du problème » [ibid., p.261].

Au niveau semi-concret il était demandé aux élèves de résoudre le même problème, en utilisant cette fois-ci des dessins. Les élèves ont alors choisi de représenter les sacs par des dessins de l'objet lui-même, ce qui rejoint les premières écritures historiques auxquelles Radford fait allusion dans ses travaux ; il cite en particulier l'usage de logogrammes pour représenter des actions, telle celle de marcher : « Ainsi, pour exprimer l'action de marcher, on utilisait le dessin d'un pied »[ibid., p.256].

Comme le souligne Radford, le troisième et dernier niveau se caractérise par une rupture dans la représentation :

> « (...) alors que, au premier niveau, l'action se fait sur l'objet lui-même et que, au deuxième niveau, l'action se fait sur une représentation "fidèle" de l'objet (en ce sens qu'elle garde la forme de l'objet représenté), à ce troisième niveau, l'élève doit faire une abstraction à propos de la représentation » [ibid., p.261].

Le symbole a été introduit ici comme dans l'histoire, dit-il, comme un moyen de faciliter les calculs : « L'histoire de l'algèbre montre en effet que c'est un souci d'efficacité qui a amené les anciens mathématiciens à développer le langage algébrique : il émerge comme une abréviation du langage parlé» [ibid., p.272]. Nous retrouvons notamment cette particularité du symbole dans la production des élèves, qui commencèrent à représenter les sacs par une grande lettre « S » et les bonbons par des nombres de petite taille[13].

Le passage du second au troisième niveau de représentation ne se fait pas sans difficultés et révèle d'intéressantes particularités. Nous avons vu plus haut, d'une part, que la représentation de l'inconnue révèle un lien très étroit avec l'objet (qui s'estompe au fur et à mesure que les élèves résolvent les problèmes). Pour ce qui est de la résolution du problème, d'autre part, Radford observe que l'écriture de l'équation peut recouvrir différentes particularités, laissant apparaître son rôle heuristique.

L'écriture de l'équation peut tout d'abord être prise « comme un appui statique sur laquelle on pose les actions qu'on doit entreprendre pour aboutir au résultat. » [ibid., p.266]. Dans ce cas, l'élève représente sur sa feuille les actions telles qu'il les a entreprises aux niveaux concret et semi-concret (en enlevant des bonbons et des sacs de chaque côté de l'équation, par exemple), sans que l'écriture de l'équation progresse ligne par ligne (ce qui ne correspond pas au format académique mais qu'on peut retrouver notamment dans les brouillons de mathématiciens). Seule une suite d'actions est représentée sur l'équation, qui sert donc essentiellement de support. Voici l'extrait d'une production d'élève[14] traduisant ce premier usage de l'écriture de l'équation (l'extrait que nous présentons ci-dessous concerne la résolution de « problèmes d'enveloppes » (cf. Radford, 1996)).

$$\begin{array}{lcccc} \overset{1}{\cancel{2}e} & +\,1 & = & \cancel{1e} & +\,3 \\ & \underline{\;-1\;} & & & \underline{\;-1\;} \\ 0 & & & & 2 \end{array}$$

Même si le résultat n'est pas explicité dans une ligne à part (l'élève n'écrit pas e=2), sa réponse apparaît cependant sur sa feuille : le « 1 » placé au-dessus du « 2e » indique « une enveloppe », c'est-à-dire ce qu'il reste à gauche et le numéro « 2 » en bas à droite indique le nombre de cartes qui restent.

Tout en étant prises comme appui, les actions peuvent toutefois être symboliquement disposées autrement. Contrairement au cas décrit précédemment, un deuxième cas se présente lorsque les actions ne se substituent pas les unes aux autres dans l'équation, mais sont séquentiellement présentées, ligne après ligne (on enlève un sac, <u>puis</u> des bonbons, etc.). L'élève représente toutefois uniquement les actions de manière séquentielle. L'équation n'étant pas reprise, elle garde la fonction de support ; elle a, selon Radford, un rôle mnémotechnique. Voici un exemple :

[13] Dans ce sens, ceci rejoint le projet leibnizien de représentation : « Une caractéristique idéale [pour Leibniz] consisterait alors à établir une application isomorphique ou correspondance bi-univoque entre les signes et les choses signifiées et qui soit telle que les liens entre les choses se reflètent fidèlement dans les compositions possibles entre les signes » (J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, 1962, p.37)].

[14] Nous avons essayé de conserver au maximum les particularités de l'aspect manuscrit de la production de l'élève.

$$\begin{array}{lcl} 2E + 1 & = & E + 3 \\ \underline{\quad -1} & & \underline{\quad -1} \\ 2E & & E + 2 \\ \underline{-E} & & \underline{-E} \\ E & = & 2 \end{array}$$

La différence entre cet exemple et celui présenté précédemment repose essentiellement sur l'ordre des actions entreprises par l'élève. Tandis que pour le premier exemple les actions sont toutes représentées « en une seule fois » (l'élève raye les enveloppes en même temps qu'il déduit le nombre de cartes), dans ce cas les actions sont écrites séquentiellement.

Finalement il n'est pas rare de trouver parmi des écrits d'élèves où ne figure aucune représentation de l'objet (à l'aide d'un symbole distinctif tel une lettre, par exemple). A la place de l'équation « traditionnelle », l'élève écrit une égalité où n'apparaissent que des nombres, représentant aussi bien les nombres de sacs que les nombres de bonbons. La signification de ces nombres est tout à fait claire aux yeux de ces élèves, comme le montre l'exemple que nous transcrivons ci-dessous (l'extrait correspond à l'énoncé suivant *: Jessica a une pizza à laquelle il manque un morceau et une pizza à laquelle il manque trois morceaux. En tout, elle a 16 morceaux de pizza. Combien y a t-il de morceaux dans une pizza complète ?*).

1-1+1-3 = 16	2 = 20	∴Il y a 10 morceaux
1-1+1+1-3+3=16+1+3	2 :2 = 20 :2	dans une pizza
1+1 = 20	1 = 10	complète.

Pour cet élève, la représentation symbolique des objets est absente et n'est pas nécessaire. En effet, l'élève ne distingue pas, à travers l'usage de signes distincts, les nombres correspondants aux morceaux de pizzas de ceux relatifs aux pizzas complètes. Il garde néanmoins l'objet « en tête », ce qui lui permet, après avoir effectué une série de calculs, de dégager la solution du problème posé.

Si cette production d'élève paraît quelque peu a-typique parmi les démarches entreprises par les élèves, il n'est pas rare de retrouver la même « idée de base » dans d'autres productions d'élèves où le symbole de l'objet sur lequel le problème repose est absent. Voici ci-dessous un exemple de la démarche d'un élève qui, petit à petit, « laisse tomber » le symbole relatif à l'inconnue du problème au fur et à mesure qu'il résout le problème. L'extrait suivant est relatif à la résolution du problème : *Nicole décide d'acheter cinq bonbons chez un dépanneur et un demi-sac de bonbons chez un autre. En tout, elle a 12 bonbons. Alors, combien y a-t-il de bonbons dans son sac ?*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}S + 5 = 12 & \\ \quad \frac{-5}{0} \quad \frac{-5}{7} & \\ \frac{1}{2} = 7 & \\ & 7 \times 2 = 14 \\ 1 = 14 & \end{array}$$

Le symbole « S », introduit au début de la résolution de l'élève ne paraît ni dans la ligne où figure « $\frac{1}{2} = 7$ » ni dans la dernière ligne, qui renvoie la solution du problème. Cependant, comme dans l'exemple précédent, l'élève sait qu'il s'agit de l'égalité : «un demi-sac de bonbons est égal à sept bonbons ».

Radford observe « qu'un papyrus greco-égyptien, daté du premier siècle av. J.C., contient plusieurs problèmes qui montrent un rôle heuristique de l'équation tout à fait semblable à celui que nous venons de discuter au sujet des façons de procéder de nos élèves (Radford, à paraître). » [ibid., p.267]

Après une analyse des productions d'élèves dont nous avons ci-dessus dégagé quelques éléments, Radford résume ses propos en affirmant :

> « (...) notre séquence d'enseignement a permis aux élèves de créer eux-mêmes leurs propres stratégies et leurs propres symboles. De plus, notre séquence a permis aux élèves de donner un contenu au symbole. (...) En effet, un symbole doit représenter quelque chose de concret. C'est le principe sur lequel repose la construction des représentations symboliques. Un symbole, sans appui sur le concret (ou sur un autre symbole à contenu sémantique non vide), ne représente rien : c'est juste un trait. Comme nous l'avons dit au départ, nous concevons que l'apprentissage des mathématiques repose en grande partie sur la construction, à la fois individuelle et sociale, des relations entre les objets et leurs représentations» [ibid., p.273]

En conclusion, nous pouvons dire que Radford suggère une introduction du langage algébrique sensiblement différente de celle que prônent la plupart des manuels scolaires. Pour lui, il est indispensable que l'élève perçoive la nécessité de création d'un symbole pour représenter un objet. De plus, ce symbole devrait émerger de l'objet lui-même : il serait, dans un premier temps, une représentation fidèle de l'objet, s'appropriant toutes ses caractéristiques. Le détachement entre l'objet et le symbole qui le représente doit se faire, selon Radford, progressivement, ce pourquoi il propose trois niveaux de représentation (concret, semi-concret, et symbolique). Notons par ailleurs que si Radford accorde autant d'importance au caractère « concret » du symbole dans le présent travail, c'est surtout parce que ses séquences d'enseignements sont destinées à de jeunes élèves, pour qui un tel renvoi au concret facilite la compréhension. Nous verrons par la suite que, si cette étroite relation symbole/objet est essentielle pour une introduction au langage symbolique, un détachement est fondamental pour mener à bien les calculs où des expressions symboliques interviennent.

Conclusion

L'usage de l'histoire des mathématiques varie, comme nous l'avons vu, selon les auteurs. Tandis que Kieran s'intéresse à la construction d'un concept donné (le concept de nombre négatif, de fonction, de variable, etc.) ou encore aux modes de raisonnement impliqués lors de la résolution de problèmes (arithmétique ou algébrique), Sfard se sert des données historiques pour prendre en compte les deux dimensions (opérationnelle et structurale) qui composent une même notion mathématique afin de déceler les différentes étapes décrites au long de son édification.

L'histoire peut également présenter un intérêt méthodologique: après avoir repéré trois principales phases de l'évolution de l'algèbre, Harper utilise ce même schéma pour décrire les modes de résolution de problèmes employés par certains élèves face à un problème donné, dans un domaine précis des mathématiques. Harper, nous le rappelons, s'intéresse plus particulièrement à repérer les similitudes et différences entre l'ordre d'acquisition de concepts algébriques dans la vie scolaire et l'évolution historique de ces mêmes concepts.

L'histoire peut finalement non seulement contribuer à l'analyse de productions d'élèves mais s'avère aussi utile pour l'élaboration de séquences d'enseignement, comme c'est le cas dans les travaux de Radford.

Bien que ces quatre auteurs adoptent différents points de vue pour analyser l'usage de l'histoire des mathématiques dans la didactique de cette discipline, tous se rapportent à l'étude de l'évolution, au cours de l'histoire et au long du développement de chaque individu, de l'algèbre au sens large du terme. Plus précisément, ils semblent se servir de l'histoire des mathématiques pour étudier les différents éléments de ce que certains auteurs dénomment, et que nous reprenons ici de façon presque intuitive, la *pensée algébrique*. En effet, tandis que certains s'intéressent à cerner les spécificités du raisonnement nécessaire à la résolution de problèmes algébriques, d'autres étudient l'apparition et l'évolution des composantes « algébriques » de certains problèmes mathématiques (telles les notions de variable, de fonction, etc.). Enfin, nous avons vu aussi que certains auteurs s'intéressent aux différentes expressions d'une telle *pensée*, qu'elles soient relatives à des problèmes mathématiques divers ou, au contraire, spécifiques à un problème donné (telle la mise en équation d'un problème).

Que ce soit la pensée algébrique elle-même, les différents concepts mathématiques qui la composent ou encore les différentes formes à travers lesquelles elle s'exprime, l'analyse de ces différents objets d'étude s'est faite, nous l'avons vu, dans des domaines variés de la didactique de l'algèbre, pour lesquels l'histoire s'est avérée le principal outil d'analyse. D'autres travaux didactiques, cependant, se sont intéressés à l'examen de quelques uns des objets de recherche précités, adoptant un axe d'étude, au contraire, plus spécifique. Tel est le cas de l'étude des symboles mathématiques, au coeur de notre problématique de recherche, largement exploitée dans divers écrits didactiques, notamment dans les travaux de Radford décrits ci-dessus.

Or si l'histoire a été, nous l'avons vu, le point de départ de l'analyse des symboles mathématiques dans les travaux de Radford, d'autres écrits didactiques relatifs aux symboles mathématiques trouvent très souvent leurs origines dans différents domaines. En effet, plus les travaux didactiques s'avèrent spécifiques de l'étude du symbolisme, plus la référence à l'histoire semble insuffisante et plus les auteurs prennent appui sur les domaines tels que la philosophie ou la sémiotique.

Il nous paraît donc nécessaire, en vue d'exploiter de telles études didactiques qui s'inscrivent dans le droit-fil de notre problématique, d'analyser au préalable les travaux qui en furent à l'origine. Nous consacrerons ainsi le prochain chapitre à cette double analyse : après une brève synthèse des textes sous-jacents aux travaux didactiques relatifs à l'étude du symbolique, nous dégagerons de ceux-ci quelques lignes directrices afin de compléter l'analyse des travaux en didactique de l'algèbre présentés dans ce chapitre.

CHAPITRE II – LE ROLE DU SYMBOLIQUE DANS LES TRAVAUX DIDACTIQUES. SENS ET DENOTATION

Nous analyserons dans ce chapitre quelques travaux didactiques ayant pour objet l'étude des signes et symboles mathématiques, qu'ils soient ou non inscrits dans le cadre des travaux de la didactique de l'algèbre. Pour ce faire, nous allons d'abord présenter le texte auquel la plupart de ces travaux font référence (Sens et dénotation, in Gottlob Frege, *Ecrits logiques et philosophiques,*1892)[1] pour ensuite analyser de plus près l'usage qu'en fait chaque didacticien. Nous nous appuierons plus précisément sur les travaux didactiques de Duval (1988, 1995), Drouhard (1992) et Arzarello (2001). Nous présenterons également les travaux d'Arcavi (1994), qui ne font pas directement allusion aux termes définis par Frege, mais où nous retrouvons une analyse relative aux *sens* des symboles mathématiques et plus précisément aux différents « sens » que les élèves attribuent aux symboles mathématiques.

II.1 - Écrits logiques et philosophiques de G. Frege

Dans *Sens et dénotation*, Frege procède à une analyse des différentes composantes d'un signe ainsi qu'à l'étude de propositions affirmatives et subordonnées. Son travail est essentiellement bâti autour de deux notions principales : le sens et la dénotation d'un signe. La synthèse que nous proposons respecte cette priorité dans la mesure où nous accordons plus d'importance aux définitions et exemples relatifs au sens et à la dénotation d'un signe qu'aux analyses de propositions. Nous verrons par la suite que l'accent mis sur les deux composantes d'un signe est repris par les didacticiens, qui se servent de ces notions pour leurs travaux relatifs aux symboles mathématiques.

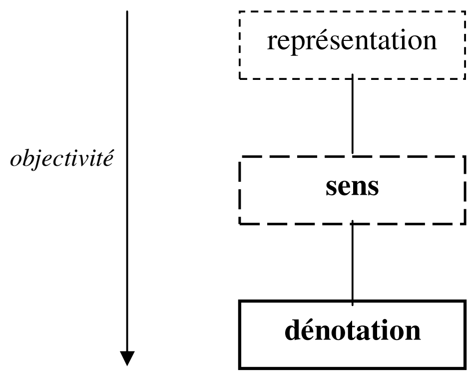
Frege entend par signe « toute manière de désigner qui joue le rôle d'un nom propre » [Frege, 1971, p.103], pouvant être un nom, un groupe de mots ou de caractères. Un signe est composé, d'après lui, de deux éléments : son sens et sa dénotation. La **dénotation** d'un signe est précisément ce qu'il désigne, et son **sens** est son mode de donation. Empruntons un exemple cité par Frege : « Soient *a*, *b*, *c* les médianes d'un triangle. Le point d'intersection de *a* et de *b* est le même que celui de *b* et de *c* » [ibid., p. 103]. Le point d'intersection des médianes peut être désigné de plusieurs façons différentes ; ici ce sont les différentes constructions géométriques qui servent de mode de donation (« point

[1] Traduit par C. Imbert dans *Écrits Logiques et Philosophiques*, 1971. Nous citerons désormais la traduction de C. Imbert.

d'intersection de *a* et de *b* », par exemple). Ces différentes désignations sont ce que Frege appelle les sens. Et si d'un côté l'objet désigné présente plusieurs modes de donation, plusieurs sens (car plusieurs expressions permettent de le décrire, telle « point d'intersection de *a* et de *b* »), il ne possède qu'une dénotation : c'est l'objet déterminé ; ici, le point en question. De même, les expressions « l'élève de Platon » et « maître d'Alexandre le Grand » ont des sens différents, cependant une seule dénotation : toutes les deux se réfèrent à Aristote.

Frege observe qu'il est possible de concevoir un sens à un signe sans qu'il lui corresponde avec certitude une dénotation et étaye son propos à l'aide d'un exemple mathématique : « L'expression "la suite qui converge le moins rapidement" a un sens, mais on démontre qu'elle n'a pas de dénotation » [ibid., p.104].

Outre le sens et la dénotation d'un signe, composantes dira-t-on intrinsèques du signe, Frege fait référence à ce qu'il dénomme la **représentation** du signe, caractéristique essentiellement subjective de celui-ci.



Le schéma ci-dessus reproduit la répartition « hiérarchique » des trois composantes d'un signe. La représentation d'un signe est entièrement subjective, elle est inhérente à un sujet et datée. C'est l' « image » que le sujet se fait à propos du signe en question ; c'est, comme le décrit Frege, un tableau que le sujet se représente. La dénotation est au contraire entièrement objective car c'est l'objet même désigné par ce signe. Entre les deux se situe le sens du signe, qui n'a pas un caractère subjectif et qui n'est pas non plus l'objet lui-même. L'exemple qu'emploie Frege pour illustrer son discours est très représentatif et dispense de toute définition complémentaire de ces termes.

> « On peut observer la lune au moyen d'un télescope. Je compare la lune elle-même à la dénotation ; c'est l'objet de l'observation dont dépendent l'image réelle produite dans la lunette par l'objectif et l'image rétinienne de l'observateur. Je compare la première image au sens, et la seconde à la représentation ou intuition. L'image dans la lunette est partielle sans doute, elle dépend du point de vue de l'observation, mais elle est objective dans la mesure où elle est offerte à plusieurs observateurs » [ibid., p.106].

Si Frege évoque la représentation d'un signe, c'est plutôt en vue d'éviter des confusions avec les deux autres composantes de celui-ci que pour parfaire son découpage. Frege explicite d'ailleurs que, tout au long de son texte, seuls le sens et la dénotation d'un signe seront pris en compte.

Après avoir exploité le sens et la dénotation d'un signe à travers plusieurs exemples, Frege s'intéresse à l'analyse du sens et de la dénotation d'une proposition principale, pour ensuite faire de même avec les propositions subordonnées.

Pour analyser les propositions, Frege commence par définir ce qu'il entend par « valeur de vérité » d'une proposition (à savoir le fait qu'elle soit vraie ou fausse), et ensuite précise la particularité de la dénotation d'une proposition affirmative: la dénotation d'une proposition affirmative est sa valeur de vérité, c'est-à-dire le vrai ou le faux. Quant à son sens, Frege observe : le rapport de la pensée (c'est-à-dire le contenu de la proposition affirmative) au vrai est celui du sens à la dénotation. Il affirme de plus que puisque la dénotation d'une proposition est sa valeur de vérité, celle-ci ne doit pas changer lorsqu'on substitue à une partie de proposition une expression de même dénotation (ayant éventuellement un sens différent). [2]

Frege conclut son travail avec l'analyse de propositions subordonnées nominales, adjectives et adverbiales, conditionnelles et circonstancielles. Dans un souci de synthèse, nous ne garderons que la conclusion générale de ses analyses : dans la plupart des cas, la subordonnée a pour sens une partie de pensée seulement, et donc sa dénotation n'est pas une valeur de vérité.

II.2 - Sens et dénotation dans les travaux de R. Duval

Nous avons vu que Frege bâtit son travail autour de deux notions clés : le sens et la dénotation d'un signe. A l'aide de ces deux concepts, il étend l'étude d'un signe à l'analyse de propositions plus complexes, dégageant leur sens, dénotation, valeur de vérité et les relations qu'établissent ces notions entre elles. Pour ce faire, Frege analyse notamment la substitution de propositions (ou de parties de propositions) par d'autres propositions (ou parties de propositions) à même dénotation, à dénotations différentes, de même sens, de sens différents, etc. Il transforme ainsi des expressions établies dans le registre de la langue naturelle en d'autres expressions appartenant également au domaine de la langue naturelle (Frege s'intéresse aux conditions qui doivent être remplies pour que de telles transformations conservent le sens d'une expression, sa dénotation ou encore sa valeur de vérité). Cette transformation interne au registre de la langue naturelle est un exemple de ce que Duval appelle un **traitement**, c'est-à-dire « une transformation de représentation interne à un registre de représentation ou à un système[3] » [Duval, 1995, p.39]. Nous retrouvons en mathématiques plusieurs situations revêtant le caractère de

[2] Le discours de Frege présente beaucoup plus de raffinement que ce qui a été ici exposé, nous nous restreindrons cependant à ce niveau.

[3] Duval appelle *registre de représentation* tout système sémiotique permettant d'accomplir les trois activités cognitives inhérentes, d'après lui, à toute représentation: « (...) constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme *une représentation de quelque chose* dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que

traitement. Duval cite notamment le calcul, qui se veut un traitement interne au registre d'une écriture symbolique de chiffres ou de lettres : « il substitue de nouvelles expressions à des expressions données dans le même registre d'écriture des nombres » [ibid., p.39].

Le sens et la dénotation interviennent dans l'analyse d'une autre notion définie par Duval, elle aussi présente dans l'activité mathématique : la **conversion**. En effet, si d'un côté nous pouvons envisager la modification d'une représentation (d'un objet, d'une information ou d'une situation) à l'intérieur d'un même registre, on peut également imaginer la « transposition » de cette représentation vers un registre différent : « la conversion est la transformation externe par rapport au registre de la représentation de départ » [ibid., p.41]. La mise en équation d'un problème énoncé en langue naturelle en est un exemple[4] ainsi que la représentation graphique d'une droite définie par son équation ou encore le passage d'une image à un texte qui le « décrit ». Soulignons que, d'après Duval, la conversion que décrit le passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations comporte en elle-même une autre conversion : c'est la traduction vers le langage algébrique des expressions linguistiques décrivant les inconnues. En effet, dans une recherche menée par l'équipe de l'IREM de Strasbourg (1996-1997), Duval et son équipe distinguent deux éléments qui caractérisent la mise en équation d'un problème énoncé en langue naturelle : ce sont, d'une part, l'identification des expressions linguistiques qui décrivent les inconnues et leur conversion en langage algébrique et, d'autre part, l'identification des expressions qui dans l'énoncé correspondent aux relations entre les quantités inconnues.

Or dans la recherche citée précédemment, l'analyse des problèmes liés aux conversions ne se fait pas en termes de sens et dénotation. Ceux-ci sont cependant repris dans *Semiosis et pensée humaine* (1995), où Duval observe que la distinction entre sens et dénotation s'avère indispensable à l'exécution de la conversion, comme le montre l'exemple suivant.

Reprenons le cas du calcul, illustratif de situations revêtant le caractère de traitement. Il n'est pas rare[5] de voir des élèves qui, même sachant additionner deux nombres avec leur écriture décimale, d'une part, et avec leur écriture fractionnaire (ce qui correspond à une fonction de traitement), de l'autre, se révèlent incapables de passer d'une écriture à l'autre afin de faciliter les calculs lorsque la situation l'exige. Duval l'explique : en réalité, l'écriture décimale et l'écriture fractionnaire constituent deux registres différents de représentations de nombres.

> « En effet, dans l'écriture d'un nombre, il faut distinguer la signification opératoire attachée au signifiant et le nombre représenté. Ainsi la signification opératoire n'est pas la même pour 0,25 et pour ¼. Car ce ne sont pas les mêmes procédures de traitement qui permettent d'effectuer les additions suivantes :

---

ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté. » [Duval, 1995, p.21]

[4]Même si cet exemple peut être interprété comme un changement de cadre dans le sens de Douady, il est important de ne pas prétendre que la conversion est un changement de cadre, Duval explique lui-même la différence : « (…) un cadre est beaucoup plus vaste que ce que nous avons appelé registre et le changement de cadre, qui doit offrir une véritable compréhension mathématique, présuppose le dépassement des écarts sémantiques. Or c'est là que commence, et que s'arrête aussi pour un nombre non négligeable d'élèves, l'apprentissage des mathématiques. » [Duval, 1988].

[5] Exemple cité par Duval (1995).

0,25 + 0,25 = 0,5
¼ + ¼ = ½

Chacun de ces signifiants "0,25" et "¼" a une signification opératoire différente mais représente cependant le même nombre. Si la signification opératoire attachée au signifiant et commandant la procédure de traitement n'est pas différenciée de l'objet nombre représenté, alors la substitution par conversion de 0,25 à ¼ n'est plus concevable ! » [ibid., p. 41-42].

Ainsi, sous le terme **signification opératoire**, nous retrouvons l'idée de *sens* introduite par Frege[6] dans la mesure où celle-ci est un mode de donation du nombre représenté. D'après Duval, même s'il n'est pas indispensable de distinguer la signification opératoire et la dénotation pour mener à bien un traitement, ces trois éléments ne sont pas indépendants les uns des autres. En particulier, nous pouvons dire que c'est la signification opératoire (et donc le sens) qui commande la procédure de traitement.

En revanche, la distinction entre sens et dénotation est nécessaire à la conversion. Comme le note Duval, si l'on attribue à chaque signification opératoire différente, i.e. à chaque sens différent (par exemple, 0,25 et ¼), une dénotation différente, la conversion n'a plus lieu d'être. En effet, dès lors que deux éléments ne sont pas perçus comme référents d'un même objet, l'un ne peut être envisagé comme le substituant de l'autre ; la conversion n'est pas concevable.

Duval analyse par la suite les problèmes spécifiques aux conversions, c'est-à-dire aux changements de registres, pour ensuite aborder les conditions d'un apprentissage fondé sur la coordination de registres, à son sens indispensable à tout apprentissage.

II.3 - Sens et dénotation dans les travaux de J. P. Drouhard

C'est dans le cadre de l'étude sémantique des Écritures Symboliques en Algèbre élémentaire (ESA) que J.P. Drouhard (1992) fait usage des notions introduites par Frege :

« Ce chapitre a pour objet de présenter les grandes lignes d'une sémantique des ESA. (...) Nous voulons voir comment les concepts de "sens" et de "dénotation" développés par Frege en 1892 peuvent s'appliquer aux ESA. Nous verrons que cette approche "Frégéenne" apporte un éclairage nouveau à des questions anciennes qui concernent aussi bien les ESA elles-mêmes (dans ce chapitre) que la didactique de l'algèbre (au chapitre suivant). » [J.P. Drouhard, 1992, p. 265]

J.P. Drouhard non seulement reprend les termes de sens et dénotation introduits par Frege, mais fournit deux éléments supplémentaires pour l'analyse d'écritures symboliques : la **connotation** et l'**interprétation**. Drouhard reste très fidèle aux définitions de *sens* et *dénotation* présentées par Frege. Ainsi, afin d'éviter toute répétition, nous allons uniquement expliciter celles relatives à la connotation et à l'interprétation pour ensuite étudier les apports des termes *sens* et *dénotation* au discours de Drouhard.

La notion d'interprétation est sous-tendue par celle de **cadre**, introduite par R. Douady et dépend de la notion frégéenne de dénotation : « J'appelle interprétation d'une ESA X dans un cadre donné tout objet qui "correspond" à la dénotation de X dans ce cadre. » [ibid, p. 280]. Les objets auxquels Drouhard se réfère sont des objets mathématiques d'où la nécessité, selon lui, de faire intervenir la notion de dénotation, dans la mesure où la dénotation d'une ESA est un objet mathématique. Les cadres dont il est ici question peuvent être de nature mathématique (cadre géométrique, graphique, arithmétique, etc.) ou « extra-mathématiques » (cadre des sciences physiques, de l'économie, etc.). Prenons un exemple : soit l'expression (ou plutôt l'ESA) $3x + 7$. Si nous nous situons dans le cadre graphique, cette expression a pour interprétation la droite d'équation $y = 3x + 7$. Dans le cadre arithmétique d'autre part, nous pouvons l'interpréter comme l'écriture d'un nombre congru à 7 modulo 3, et ainsi de suite.

Il est important d'observer que l'interprétation d'une ESA ne revêt pas de caractère subjectif, dans la mesure où « la nature des diverses interprétations ne dépend pas de ceux qui les ont à l'esprit. » [ibid., p.283]. Ainsi, comme le souligne Drouhard, « associer $4x$-2 à une droite du plan, je ne suis pas le seul à faire, et tous ceux qui le font associent la même droite à la même expression » [ibid., p.283]. Cependant, ce qui varie d'une personne à l'autre c'est la façon dont cette droite est représentée (au sens de Frege) ; ceci est à l'origine du second concept développé par Drouhard : la connotation.

Inspiré par le terme *représentation* introduit par Frege (cf. paragraphe II.1), Drouhard propose celui de **connotation** pour ce qui relève du caractère subjectif sous-jacent à la perception et interprétation d'une ESA par un sujet :

> « Plus généralement, tout individu perçoit et interprète une ESA d'une manière spécifique, qui dépend de son expérience, et en particulier des situations par lesquelles est abordée cette ESA ou des ESA analogues. Je qualifie de **connotation** cette perception et cette interprétation subjectives. » [ibid., p.283. Caractères soulignés dans l'original]

Cette définition rejoint de très près celle de représentation au sens de Frege, cependant Drouhard explicite que le choix du terme *connotation* au détriment de celui de *représentation* s'est essentiellement fait pour des raisons sémantiques :

> « Ce dernier terme est en effet fâcheusement polysémique (système de représentation, représentations graphiques, représentations mentales, représentation de connaissances etc.), aussi ai-je préféré "connotation" qui ressortit au vocabulaire spécialisé de la linguistique, pour éviter encore une fois les significations parasites. » [ibid., p.283]

L'objet de ce chapitre étant d'étudier l'apport des termes *sens* et *dénotation* à plusieurs travaux didactiques, nous ne retiendrons ici uniquement l'usage que Drouhard fait de ces deux termes, bien qu'ils soient insuffisants selon lui pour une analyse sémantique des ESA (d'où l'introduction des deux autres notions que nous venons de décrire). Nous retiendrons plus particulièrement l'usage de ces

[6] Nous retrouvons, nous le verrons, l'équivalent de ce que Duval dénomme *signifiant opératoire* dans les travaux de Arzarello, sous la définition de *sens algébrique*.

termes lors d'interprétations de productions d'élèves issues d'entretiens réalisés par l'équipe du GECO[7] (1997).

Ces entretiens se basent sur certaines attitudes d'élèves auxquelles les enseignants sont fréquemment confrontés au cours de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Les enseignants sont notamment désemparés lorsqu'ils font face à l'erreur classique : $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Il y a en quelque sorte un malentendu constant entre professeur et élève, celui-ci comprenant rarement les explications de celui-là et vice-versa. L'explication du professeur qui essaye de dissuader l'élève en lui présentant un contre-exemple (en montrant par exemple, que pour a=2 et b=3 $(a+b)^2$=25 tandis que a^2+b^2=13) ne convainc pas forcément l'élève. Si pour cet élève, la valeur de l'expression n'a aucune importance, il ne comprend pas que l'argument sur lequel le professeur s'appuie fait appel à la dénotation de l'expression. L'élève ignore que les transformations (ici le développement du carré) sont censées conserver les dénotations ; en d'autres mots, « que la *valeur* de ce carré doit rester la même pendant son développement » [Drouhard, 1997, p.47]. Ainsi, d'après Drouhard, lorsque l'enseignant propose la formule $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ en substitution à celle produite par l'élève ($(a+b)^2 = a^2+b^2$), celui-ci la perçoit comme un « choix » du professeur, qui « préfère » « sa » règle de transformation à celle proposée par l'élève. De plus, la différence de valeur que prennent les deux expressions lorsqu'on substitue a et b par des données numériques ne semble pas choquer les élèves, qui répondent : « Vous faites une transformation et j'en fais une autre. Les valeurs ne sont pas les mêmes ? C'est normal, puisque nous n'avons pas fait la même chose ! »[8]. Cette remarque révèle bien qu'il y a primauté d'un sens des écritures au détriment de leur dénotation (et, à notre avis, il y a primauté de la connotation sur la dénotation). En d'autres mots, l'élève ne perçoit pas la priorité de la dénotation des écritures sur leurs sens, alors que, pour nous, les choix s'effectuent certes en fonction du sens, mais le respect de la dénotation des écritures demeure un critère indispensable.

Ceci dit, et Drouhard le souligne, lors de résolutions algébriques, il n'est pas nécessaire (et cela est d'ailleurs souvent fortement recommandé) de prendre en compte, à tout moment, la dénotation des écritures algébriques. Pour mener à bien quelques manipulations algébriques, il est indispensable de pouvoir momentanément se détacher du contexte dans lequel ces calculs sont proposés, et ainsi pouvoir effectuer des transformations[9]. C'est, en d'autres mots, le « savoir oublier » (cf. Serfati). Néanmoins, il faut pouvoir accéder aux dénotations de ces écritures à tout moment et, ce faisant, être conscient que à toute ESA correspond une dénotation. Drouhard résume ainsi les facultés qu'un élève doit posséder lors de manipulations algébriques :

[7] Association pour le développement du Génie Cognitif : C. Sackur, J.P. Drouhard, M. Maurel, M. Pécal.
[8] Cité dans la recherche menée par GECO (1997).
[9] Ceci rejoint de très près la position de Leibniz, commentée par Dascal, concernant l'emploi des signes : « [Leibniz] compare l'usage intelligent des mots (et d'autres signes) avec l'emploi de jetons (...), non parce que ceux-ci renvoient tout le temps aux idées qu'ils sont censées représenter, mais plutôt parce que l'on peut effectuer sur ces jetons eux-mêmes toutes les opérations de calcul que l'on veut, *sans* passer incessamment au plan des idées. En réalité, c'est la possibilité de délayer indéfiniment ce renvoi aux idées qui est surtout appréciée par Leibniz » (M. Dascal, *La sémiologie de Leibniz*, 1978, p. 222. Italiques dans l'original).

« - savoir que toute ESA a une dénotation
- savoir **exprimer** que toute ESA a une dénotation
- savoir **calculer** la dénotation d'une ESA
- et savoir **quand** il est intéressant de calculer la dénotation d'une ESA. » [ibid., p.363. Caractères en gras dans l'original]

Ainsi, nous avons vu que les notions de *sens* et *dénotation* introduites par Drouhard lui servent non seulement d'outil d'analyse de quelques production d'élèves mais sont également à la base de la notion de **com-préhension** [Drouhard, 1992] d'une ESA, c'est-à-dire « prendre en compte ensemble leur syntaxe, leur dénotation, leur sens et leur interprétation. » [ibid., p. 376]

Si Drouhard et Duval restent fidèles aux notions des sens et dénotation introduites par Frege (le premier rajoutant toutefois les notions de *connotation* et d'*interprétation*), il n'en est pas de même pour Arzarello, qui s'inspire des notions frégéennes en les adaptant à ses besoins. Nous verrons dans le paragraphe suivant dans quelle mesure les définitions de « sens » et « dénotation » présentées par Arzarello diffèrent de celles de Frege et étudierons l'apport de ces deux termes aux analyses didactiques menées par celui-là.

II.4 - Sens et dénotation dans les travaux d'Arzarello

Arzarello reprend les définitions de *sens* et *dénotation* introduites par Frege et s'en sert comme point de départ de son discours :

> « the Bedeutung [denotation] of an expression is the object (Gegenstand) to which the expression refers, while the Sinn [sense] is the way in which the object is given to the mind, or in other words, it is the thought (Gedanke) expressed by the expression. » [Arzarello, 2001, p.62].

Arzarello dédouble cependant la notion de sens d'une expression algébrique pour définir les **sens algébrique** et **contextualisé** d'une expression.

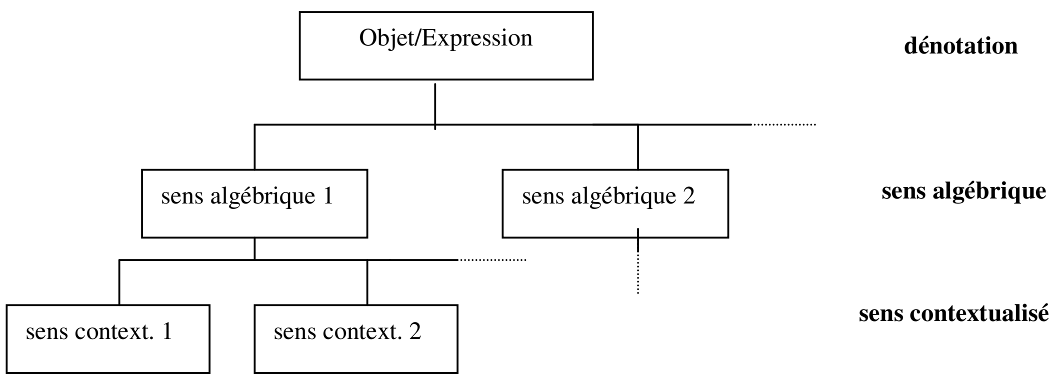
Le sens algébrique correspond à la façon dont l'objet nous est donné, plus particulièrement à travers les règles de calcul explicites dans l'expression. Ainsi, les expressions $n(n+1)$ et n^2+n possèdent deux sens algébriques différents : le même objet (c'est-à-dire la dénotation des expressions, à savoir, d'après Arzarello, la fonction à laquelle les deux expressions renvoient[10]) est exprimé à partir d'opérations différentes. Arzarello fournit un autre exemple : les deux équations (à résoudre dans IR) $(x+5)^2 = x$ et $x^2+x+1 = 0$ dénotent le même objet (l'ensemble vide)[11] mais possèdent des sens algébriques différents.

Outre le sens algébrique, Arzarello soutient qu'à toute expression algébrique correspond (au moins) un sens contextualisé, qui dépend du domaine (mathématique ou extra-mathématique) dans

[10] Nous discuterons par la suite plus en détail ce qu'Arzarello entend par dénotation d'une expression.

lequel elle apparaît. Reprenons l'expression citée ci-dessus. On peut accorder au moins deux sens différents à l'expression $n(n+1)$: dans le cadre de la théorie élémentaire des nombres, le sens correspond au « produit de deux nombres consécutifs », tandis que si l'on se place dans le contexte de la géométrie élémentaire, l'expression peut référer à l'aire d'un rectangle dont les côtés (entiers) sont n et $(n+1)$. D'après Arzarello : « (...) the above formulas express different thoughts, with respect to the different contexts where they are used » [ibid., p.63]. La même expression ($n(n+1)$) possède, nous avons vu, deux sens contextualisés différents; elle dénote toutefois le même objet : dans l'univers des nombres naturels, la dénotation correspond à l'ensemble A={0, 2, 6, 12, 20, ...}. Profitons de cette dernière observation pour éclairer le discours d'Arzarello.

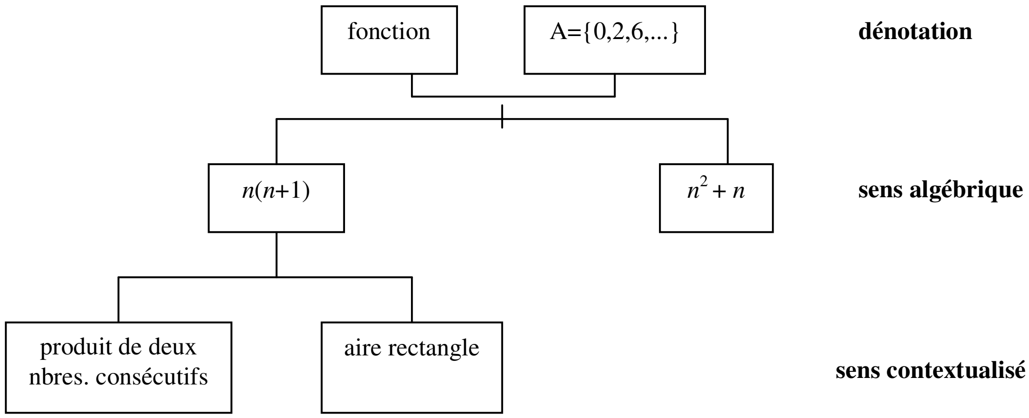
Nous avons vu, dans le premier paragraphe de cette section, que les expressions $n(n+1)$ et n^2+n possèdent deux sens algébriques différents ; elles dénotent cependant la même fonction. D'un autre côté, Arzarello observe que l'expression $n(n+1)$ dénote, lorsqu'on se place dans l'univers des nombres naturels, l'ensemble A={0, 2, 6, 12, 20, ...}. Ceci illustre bien ce qu'Arzarello entend par dénotation d'une expression. La dénotation d'une expression n'est pas, d'après lui, unique : elle dépend du domaine mathématique dans lequel elle est présentée. Même si Arzarello n'explicite pas cette « contextualisation » de la dénotation, cette idée est présente tout au long de son discours. Nous proposons ci-dessous un schéma traduisant les principales idées dont il est ici question.



Une expression algébrique possède un ou plusieurs sens algébrique(s) ; ce sont les différentes façons par lesquelles l'objet dénoté est présenté. Plus précisément, ce sont les différentes *formules* (faisant apparaître différentes règles de calcul) qui traduisent l'objet. Or chaque formule peut être « interprétée » dans un cadre mathématique différent, étant ainsi à l'origine de différents sens contextualisés.

Traduisons schématiquement les exemples cités ci-dessus.

[11] Frege aurait dit le faux.



Nous avons voulu plus particulièrement expliciter dans ce schéma la non unicité de la dénotation d'une expression (qui n'apparaît pas dans le schéma général) à laquelle Arzarello fait allusion dans ses travaux, notamment lorsqu'il parle de « denotation within a universe » [ibid., p.64]. Nous avons traduit cette multiplicité en dédoublant le « tronc » qui lie la dénotation au sens algébrique. Dans l'exemple que nous avons choisi, les deux sens algébriques renvoient à deux dénotations différentes: en effet, $n(n+1)$ ou n^2+n possèdent deux dénotations différentes, selon qu'on se place dans l'univers des nombres naturels ou dans le monde des fonctions.

Cependant, lorsque Arzarello analyse les productions d'élèves, il observe que ce n'est pas tant la possible diversité de la dénotation d'une expression qui leur pose problème que la variété des sens sous-jacents à une expression (ou aux expressions obtenues par manipulation syntaxique à partir de la première)[12]. Or si cette multiplicité de sens se révèle source d'obstacles pour beaucoup d'élèves, elle peut également contribuer à la résolution de problèmes (Arzarello dit d'ailleurs que cette diversité de sens est à l'origine même de la puissance de l'algèbre).

Afin d'étayer nos propos et d'analyser plus en détail l'apport des notions de sens et dénotation aux travaux didactiques d'Arzarello, nous présenterons ci-après l'analyse d'un protocole faite par lui-même [ibid., p.65] d'une élève de 20 ans à qui l'on a demandé de résoudre le problème suivant : *Montrer que le nombre $(p-1)(q^2-1)/8$ est un nombre pair, sachant que p et q sont des nombres premiers impairs*.

Épisode 1. Ann développe l'expression, en écrivant les mots *pair*, *impair* sur le papier à côté des expressions.

$$(p-1)(q^2-1)/8 = (p-1)(q+1)(q-1)/8$$

Ann indique les éléments de l'expression et dit :

« pair, pair, pair................hmmm..........le nombre qui reste n'est pas pair... »

[12] Ce qui est légitime, puisque la dénotation est localement stable.

Épisode 2. Ann applique quelques transformations algébriques à son expression tout en employant les mots pair, impair :

$$(p-1)(q^2-1)/8 = (pq^2-q^2-p+1)/8$$

Ann effectue oralement quelques calculs tels « impair fois impair égal à pair », et ensuite dit : « *...hmmm...ça ne marche pas !* ».

Épisode 3. Comme dans l'épisode précédent, mais cette fois-ci les calculs tels « impair fois impair égal à pair » se reportent aux facteurs (p-1), (q^2-1) ; alors Ann dit « *il faut sûrement employer une formule concernant les nombres premiers !* ».

Épisode 4. Ann gribouille les formules de l'épisode précédent et les vérifie avec des nombres premiers : les informations sont présentées sous forme de tableau :

p	q
3	5
5	7
3	7

$$\frac{(3-1)(25-1)}{8} = \frac{2 * \overset{3}{\cancel{24}}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(5-1)(49-1)}{8} = \frac{4 * \overset{6}{\cancel{48}}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(3-1)(49-1)}{8} = \frac{2 * \overset{6}{\cancel{48}}}{\cancel{8}}$$

Ann observe : « *Alors q^2 moins un est déjà un multiple de 8* ».

Épisode 5. Ann change de feuille de papier et écrit :

$$\frac{(p-1)(q^2-1)}{8}$$

multiple de 2 multiple de 8

Ensuite Ann écrit les expressions suivantes :

$$(2h+1-1)((2k+1)^2-1)/8 = 2h(4k^2+4k+1-1)/8 = 2h\ 4k(k+1)/8$$

et dit: "*si k est pair, quatre (fois) k est multiple de 8* (Ann indique du doigt le 8 de l'expression), *alors il reste un multiple de 2* (Ann indique le 8 de l'expression) *et tout va bien*. *Si k est impair*.........(Ann simplifie le 8 avec le 4 et écrit de façon habituelle, mettant le 2 à côté du 8 ; puis simplifie le 2 avec le 2, coefficient de h).

Si k est impair, ça ne marche pas... Non ! Si k est impair, alors k plus un (Ann indique le k+1 de l'expression) *est pair et nous avons fini !* »

Épisode 6. Ann regarde à nouveau l'énoncé du problème et dit : « *Mais les nombres premiers n'ont rien à voir avec tout ça ! Les nombres impairs suffisent* ».

Reprenons à présent l'analyse de ce protocole faite par Arzarello en termes de sens et dénotation[13].

D'après Arzarello, la relation sens-dénotation de l'expression relève d'un aspect dynamique et semble même être un « outil de la pensée » (*thinking tool*), agissant comme un moteur pour la recherche de la résolution du problème. Cette relation, que nous décrirons plus en détails ci-après, s'avère « fonctionner » dans deux directions : tantôt ce sont les aspects **intensionnels** (c'est-à-dire tous les sens possibles relatifs à une expression) qui sont guidés et construits par les aspects **extensionnels** (c'est-à-dire la dénotation « contextualisée » de l'expression), tantôt le contraire[14].

Le premier cas se présente lorsque le sujet applique à l'expression des manipulations formelles étroitement liées à la dénotation supposée de l'expression (nous irons au-delà et soulignons : il applique des manipulations formelles, en étant guidé par la dénotation de l'expression) c'est-à-dire lorsqu'il change la « forme » de l'expression (nous rajoutons, reprenant les termes d'Arzarello, que le sujet change le sens algébrique de l'expression) dans le but de « mouler » l'expression, à laquelle se rattachera alors un sens attendu. C'est le cas des épisodes 1 et 2 où Ann, guidée par l'objectif de la tâche (c'est-à-dire aboutir à un produit de facteurs qui soit divisible par 8), transforme l'expression dans le but de lui faire correspondre (ou tout du moins de faire correspondre à une partie de l'expression, dans ce cas à un -ou plusieurs- facteur(s)) un sens donné[15]. C'est la dénotation, dans ce cas, qui guide les transformations de l'expression. Nous reproduisons ci-dessous le schéma fourni par Arzarello qui traduit ce premier cas de la dynamique présente dans la relation sens-dénotation :

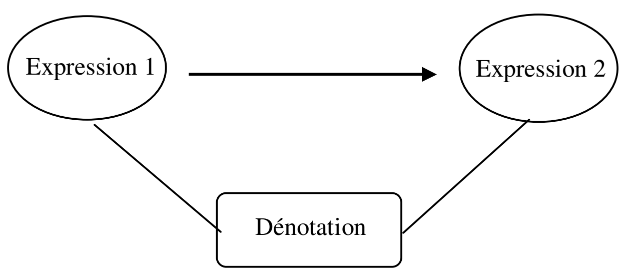


Figure 1

Dans le second cas, il s'agit de trouver des sens différents (des intensions nouvelles) sans avoir recours aux manipulations de l'expression, en regardant plutôt la dénotation d'une façon différente. Nous retrouvons ce second cas dans la deuxième partie de l'épisode 5. A ce moment, l'expression présente une subtilité : Ann ne lui fait correspondre le sens « $k(k+1)$ est multiple de 2 » de façon

[13] L'analyse décrite par Arzarello repose sur plusieurs éléments théoriques, tels la notion de « fenêtre conceptuelle ». Nous dégagerons cependant les seuls aspects de son analyse en relation avec les notions de *sens* et *dénotation* tels qu'Arzarello les définit.

[14] Les termes « extensionnels » et « intensionnels » ont été introduits par Arzarello dans ces acceptions.

[15] Arzarello ne précise pas de quel sens il s'agit, nous supposons toutefois qu'il parle du sens algébrique de l'expression.

évidente que dans le cas où k est pair. Le problème qu'Ann affronte pour k impair illustre bien, selon Arzarello, le deuxième volet de la dynamique sens-dénotation. Pour résoudre le cas où k est impair, Ann procède dans un premier temps à une série de simplifications (elle simplifie le 8 avec le 4, puis le 2 avec le 2, coefficient de h) et à ce stade, selon Arzarello, la dénotation de l'expression (c'est-à-dire le fait qu'elle représente un nombre pair) ne correspond pas avec le sens attendu (k+1 est pair quand k est impair). Afin de résoudre ce problème, il n'est plus question de manipuler l'expression (comme c'était le cas lors des épisodes 1 et 2), mais de « activate a new part of the symbolic expression according to its denotation » [ibid., p.70]. Arzarello affirme que c'est justement le changement pair→impair de la dénotation qui rend ce travail possible. Contrairement à ce que nous retrouvons dans les épisodes 1 et 2, l'expression ne change pas de « forme », c'est son sens qui se modifie, une fois que le sujet entrevoit la dénotation différemment. Nous reproduisons ci-dessous le schéma utilisé par Arzarello pour étayer ce deuxième volet de la dynamique de la relation sens-dénotation.

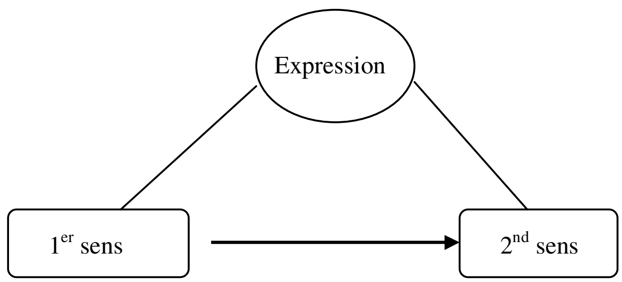


Figure 2

En conclusion, Arzarello regroupe ces deux aspects pour parler d' « expressions en tant qu'outils de la pensée » (*formulas as thinking tools*), en soulignant que l'on peut « penser à l'aide des expressions » de deux façons différentes : la première consiste à transformer son intension et de manipuler l'expression d'après son extension (supposée) (Figure 1) et la seconde consiste à trouver une nouvelle intension (supposée) sans effectuer sur elle des manipulations formelles (Figure 2), mais plutôt en décelant une nouvelle extension (supposée). Arzarello poursuit son analyse en introduisant les notions de **fenêtre conceptuelle**, d'**espace mental** , d' **évaporation** et de **condensation** ; nous ne détaillerons cependant pas ces termes, nous restreignant aux aspects « frégéens » de son étude.

II.5 - Donner du sens aux symboles mathématiques selon Arcavi

C'est en se basant sur ses expériences personnelles d'enseignement, en observant notamment élèves et enseignants résoudre des problèmes d'algèbre qu'Arcavi établit une étude relative à la « compréhension » des symboles mathématiques, un prélude à une définition du « sens donné à un symbole ». Cette expérience lui a permis de reconnaître la similarité de comportements d'élèves relativement aux différents « sens » rattachés aux symboles et lui donne des éléments pour mieux analyser les observations recueillies dans les classes.

Ce qu'Arcavi propose dans son étude n'est ni une liste de comportements ni une liste d'éléments censés prendre en compte tous les aspects sous-jacents à la façon dont on « donne du sens à un symbole » ; son travail n'a pas la prétention d'être exhaustif. Ce sont plutôt des caractéristiques récurrentes repérées dans la façon de résoudre un problème où l'algèbre intervient. Plus précisément, Arcavi s'intéresse au volet subjectif présent lorsque le sujet donne du sens aux symboles[16]. A l'origine de son étude, Arcavi dresse une analogie entre le terme « sens » qu'il emploie lorsqu'il parle de « donner un sens à un symbole » et celui proposé par The Oxford Encyclopedic English Dictionary. Nous transcrivons ci-dessous ce passage, qui reflète bien l'idée sous-jacente au discours de Arcavi.

> « Regarding the inner nature of symbol sense as a feel, it may be illustrative to make an analogy to the "physiological" meaning of the word sense, as brought by The Oxford Encyclopedic English Dictionary : « any of the special bodily faculties by which sensation is roused ». We can adapt this to symbol sense as: "any of the special mathematical faculties by which meaning is roused". It would be a desired goal for mathematics education to nurture symbol sense to become an indivisible part of our mathematical tool kit, in a similar way in which our physiological senses are an integral part of our biological being. The analogy suggests that symbol sense should become part of ourselves, ready to be brought into action almost at the level of a reflex. But also, in the same way that when our senses fail us we tend to develop substitutes, our symbol sense should tend to develop ways to overcome our "failures" (for example, the awareness to overcome by any means situations involving "symbolical illusions").» [Arcavi, 1994, p.29]

D'après cette analogie, nous comprenons mieux le volet du « sens » d'un symbole mis en lumière dans son étude : c'est en quelque sorte un regard « intuitif » des symboles que Arcavi a repéré à travers les actions d'élèves (et enseignants) lors de la résolution de problèmes. C'est à travers leurs comportements qu'Arcavi dégage une série de caractéristiques du « sens » d'un symbole qu'il classifie d'« informelles » (nous dirons subjectives). En fait, selon Arcavi, donner du sens c'est, entre autres:

- Reconnaître la puissance des symboles, c'est-à-dire être capable de reconnaître quand et comment les symboles doivent être employés afin d'établir des relations, des généralisations ou preuves. Mais surtout, c'est reconnaître qu'en leur absence, de telles relations ou des preuves ne pourraient venir à jour. Ce n'est pas simplement créer des relations à l'aide de symboles, c'est plutôt faire émerger des relations grâce à eux.

Prenons sur ce point un exemple décrit par Arcavi : *Soit un rectangle quelconque. Que se passerait-il en ce qui concerne son aire, si on augmentait de 10% l'une de ses dimensions et si on diminuait de 10% l'autre ?* Les élèves ont tendance à répondre, initialement, qu'il ne se passe rien (ceci étant probablement dû, selon Arcavi, à l'illusion de « compensation ») ou encore que le changement subi par l'aire dépend de la dimension qui augmente et de celle qui diminue. De simples applications numériques montrent bien que l'aire diminue dans tous les cas, mais c'est uniquement lorsque les élèves font appel aux symboles que le résultat devient clair. Soient l et L les deux dimensions du rectangle, l'aire du nouveau rectangle peut s'écrire comme le produit $0.9l*1.1L$ ou $1.1l*0.9L$, c'est-à-dire $0.99lL$ dans les deux cas. D'après Arcavi, « in a beautifully concise way, the symbols express the whole scenario of the problem » [ibid., p.7]. Tout d'abord, dit-il, l'expression montre bien que l'aire diminue. Ensuite, elle montre de combien elle diminue (1%). Finalement, le résultat est indépendant de la dimension qui augmente et de celle qui diminue. En conclusion, Arcavi affirme :

«(...) we claim that symbol sense should include, beyond the relevant invocation of symbols and their proper use, the appreciation of the elegance, the conciseness, the communicability and the power of symbols to display and prove relationships in a way that arithmetic cannot. » [ibid., p.8]

- En sens inverse, donner du sens c'est également ressentir le moment où il faut laisser les symboles de côté, dans le but de faire progresser le problème en favorisant d'autres approches qui pourraient rendre la solution plus facile ou élégante.

C'est le cas par exemple de la résolution d'une inéquation telle $|x\text{-}2|>|x\text{-}6|$, pour laquelle Arcavi suggère une relecture des symboles : interpréter $|x\text{-}2|$ comme étant la distance entre un nombre quelconque et 2 et ainsi traduire le problème comme étant la recherche de nombres dont la distance jusqu'à 2 est plus grande que leur distance jusqu'à 6. On pourrait encore, suivant la suggestion de Friedlander et Hadas (1998), regarder $|x\text{-}2|$ et $|x\text{-}6|$ comme deux fonctions de x, et résoudre le problème dans le cadre graphique.

- Arcavi souligne un troisième volet relatif au sens donné à un symbole, qui réunit la première et seconde caractéristiques énoncées ci-dessus. Donner du sens à des symboles c'est travailler dialectiquement avec eux : d'une part, c'est les manipuler tout en se détachant de leur sens (*meaning*) afin de rendre la manipulation plus efficace et rapide et, d'autre part, c'est lire les symboles *à travers* leur sens, permettant ainsi d'établir des liens et de prendre en compte le caractère raisonnable du résultat.

- Donner du sens c'est aussi être conscient que la modification de la traduction symbolique d'un problème peut influencer le progrès du résultat et c'est savoir comment manipuler les expressions de façon à mener à bien le problème.[17]

Soit le problème : « *prenez un nombre impair, élevez-le au carré et ôtez 1. Que pouvez-vous dire du nombre qui en résulte ?* ». Un tel nombre peut être représenté sous $(2n\text{-}1)^2\text{-}1$. Après manipulation, cette écriture peut être donnée sous la forme $4n^2\text{-}4n$, dans le but d'une conclusion générale. A première vue, l'élève peut s'arrêter là et répondre que le nombre trouvé est un multiple de 4. Toutefois, si l'on ré-arrange les symboles en écrivant $4n^2 - 4n= 4n(n\text{-}1)$ et si on « lit à travers les symboles », on s'aperçoit que le résultat est toujours multiple de 8. Si l'on transforme encore une fois l'écriture, en

[16] Arcavi parle de *informal sense-making* (la langue anglaise lui permet de traduire à l'aide d'un substantif le fait de « donner un sens »). Dans le discours d'Arcavi, «donner un sens » prend ainsi quelque part une dimension dynamique que nous pourrions traduire par un « faire sens » informel.

[17] C'est le cas du protocole de Ann, analysé dans le paragraphe précédent.

posant $4n(n\text{-}1)=8n(n\text{-}1)/2$, on se rend compte que le résultat est non seulement un multiple de 8, mais que ce multiple est très particulier : il est tel que l'autre facteur est un nombre triangulaire.

- Donner du sens aux symboles c'est également pouvoir traduire le problème à l'aide de symboles et pouvoir juger de la pertinence de ce choix. C'est aussi être capable de changer la « traduction » si nécessaire.

Reprenons l'exemple précédent. Si le nombre impair avait été représenté par n au lieu de $2n$-1, le résultat obtenu aurait été n^2-1. Il est vrai qu'en factorisant l'expression, nous aboutissons à l'expression $(n\text{-}1)(n+1)$, qui traduit le produit de deux nombres pairs consécutifs. Ainsi, nous concluons que l'un d'entre eux est forcément multiple de 4 et donc que le résultat est multiple de 8. Or le choix de représenter le nombre impair par n au lieu de $2n$-1 ne nous donne pas d'information supplémentaire, notamment en ce qui concerne la nature de ce multiple (explicitée dans le cas précédent). Le choix du symbole a donc non seulement des effets cruciaux sur le processus de résolution du problème mais également sur les résultats.

- Selon Arcavi, donner du sens à un symbole c'est être capable, à tout moment, d'interpréter les symboles et de comparer leur « sens » aux réponses attendues ou à nos intuitions.

- Finalement, donner du sens aux symboles c'est être conscient des différents rôles qu'ils peuvent jouer selon les contextes.

Considérons par exemple l'égalité y=ax+b. Même si x, y (les variables) et a,b (les paramètres) représentent des nombres, les objets mathématiques que l'on obtient après substitution peuvent être très variés. Si on se place dans le cadre graphique, en attribuant à x et à y des valeurs numériques, l'égalité nous renvoie un point parmi l'ensemble de tous les points tandis que lorsqu'on attribue à a et à b des valeurs numériques, l'égalité nous renvoie une droite parmi l'ensemble de toutes les droites. Ainsi, y=b peut être interprété de deux façons différentes selon le contexte. Si cette égalité est le résultat obtenu après avoir remplacé x par 0 dans y=ax+b, alors elle représente le point où une droite (dont l'équation est de la forme y=ax+b) coupe l'axe des ordonnées. D'autre part, si y=b est le résultat de la substitution de a par 0 dans y=ax+b, alors cela représente la famille de droites ayant un coefficient directeur nul.

Conclusion

L'objet du présent chapitre a été d'examiner les différents axes de recherche qu'utilisent certains didacticiens pour cerner la question du symbolisme dans l'enseignement des mathématiques. Nous avons vu, à travers les paragraphes précédents que, pour prendre en compte le rapport des élèves au symbolisme, bon nombre d'auteurs se réfèrent aux notions de *sens* et *dénotation* introduites par Frege. Cependant, l'interprétation et l'emploi de ces deux notions ont présenté des variations selon les différents auteurs, qui ont parfois adapté la définition de celles-ci à leurs besoins. Si certains, comme

Duval ou Drouhard, se sont montrés fidèles aux termes frégéens (le second rajoutant toutefois les notions de *connotation* et d'*interprétation*), d'autres s'en sont éloignés, comme le montrent les travaux d'Arzarello qui, d'une part, dédouble la notion de sens d'une expression algébrique pour définir ce qu'il a dénommé *sens algébrique* et *sens contextualisé* d'une expression et qui, d'autre part, « contextualise » la notion de dénotation.

Observons que ni Duval ni Drouhard ne partagent cette conception de la dénotation, restant fidèles aux définitions fournies par Frege. Nous retrouvons cependant la notion de s*ens contextualisé* dans le discours de Drouhard, qui introduit le terme *interprétation*. Nous ne pouvons cependant pas dire que l'interprétation selon Drouhard correspond exactement à ce qu'Arzarello entend par sens contextualisé : la notion d'interprétation est, nous avons vu, étroitement liée à l'idée de cadre, introduite par R. Douady, tandis que celle de sens contextualisé n'en n'est pas dépendante. En effet, selon Arzarello : « (...) the same formula is able to incorporate additional senses, apart from the algebraic one. In fact, it can be used in different knowledge domains, mathematical or not, each generating (at least) a new sense, depending on the nature of the domain » [ibid., p.63]. Dans la mesure où Arzarello parle de « domaines de connaissance », qui peuvent ou non être de nature mathématique, le sens contextualisé diffère de la notion d'interprétation. De plus, s'il est possible, d'une part, selon Arzarello, d'attribuer à une expression algébrique deux sens contextualisés différents appartenant à un même cadre mathématique, parler de deux interprétations d'une même expression sous-entend parler de deux cadres différents : donner deux interprétations différentes à une écriture algébrique c'est en quelque sorte la « traduire » dans deux cadres différents.

Finalement, nous avons examiné les travaux de Arcavi qui, bien que ne faisant pas allusion aux termes introduits par Frege, s'intéresse à l'examen du rapport au symbolisme et plus précisément aux différentes interprétations (au sens large du terme) que les élèves attribuent aux symboles mathématiques. Tandis que Duval, Drouhard et Arzarello sous-tendent leurs recherches d'éléments essentiellement théoriques, Arcavi tisse son discours autour d'expériences personnelles dont il se sert pour construire une idée plutôt intuitive du sens donné aux symboles mathématiques. Ainsi, Arcavi semble regrouper, à travers son expérience, une série de comportements qui viendraient illustrer ce que Drouhard dénomme *com-préhension* d'une expression algébrique, sans toutefois se référer au terme frégéen de *dénotation*.

A travers la synthèse des travaux des quatre auteurs précités, nous avons vu que certaines études en didactique de l'algèbre portant sur le thème spécifique des signes mathématiques (ou expressions algébriques) se distinguent de celles étudiées dans le chapitre précédent de par le cadre théorique employé. En effet, si les auteurs cités dans la première partie de notre travail se sont essentiellement servis de l'histoire de l'algèbre pour étayer leurs propos, ce domaine cède la place à des théories spécifiques à l'objet d'étude dès lors que les auteurs raffinent leurs analyses sur le symbolisme.

Or cette mise en regard des travaux qui figurent dans les deux premières parties de notre travail ne doit aucunement être interprétée de façon catégorique. Si nous avons regroupé certains auteurs autour d'une même caractéristique (tel le recours à l'histoire dans les analyses didactiques), ceux-ci ne peuvent y être limités. Plus particulièrement, dans les récents travaux de Radford (2002, 2003), dont l'objet d'étude est en étroit rapport au symbolique, l'analyse historique s'accompagne très souvent d'une analyse sémiotique, tout en prenant en compte la dimension socio-culturelle de la constitution d'un symbole. Le lecteur avisé interprètera ainsi les travaux cités jusqu'à présent comme étant certes représentatifs des deux ensembles (artificiellement) créés, cependant ne s'y limitant point.

Quoi qu'il en soit, la philosophie (et plus précisément les écrits philosophiques se rapportant aux signes, de façon générale) s'est avérée un point d'entrée pour la plupart des auteurs auxquels nous avons fait référence dans ce chapitre. Ainsi, si nous voulons analyser le rapport des élèves au symbolisme algébrique, il nous parait indispensable d'approfondir notre connaissance relativement à notre objet d'étude et, suivant la direction empruntée par Drouhard, Duval et Arzarello, d'approfondir nos recherches dans le domaine de la philosophie. Le chapitre suivant sera donc destiné à dresser un panorama général de quelques travaux épistémologiques portant sur l'algèbre et plus précisément sur le symbolisme algébrique dans l'optique de constituer une grille d'analyse, débordant le cadre largement exploité du « sens et dénotation » des signes, qui nous permettrait de progresser dans notre problématique.

CHAPITRE III – QUELQUES ECRITS EPISTEMOLOGIQUES AUTOUR DE L'ALGEBRE

L'objet de ce chapitre est, comme nous l'avons annoncé, d'approfondir notre recherche dans un registre épistémologique, lequel s'est avéré, au vu de l'étude menée dans le chapitre précédent, un point d'entrée pour certains didacticiens dont les travaux portent sur l'algèbre. Il s'agit donc ici de compléter l'analyse développée dans ce qui précède, relative au termes frégéens de *sens* et *dénotation*, à travers la mise en perspective de différents écrits philosophiques qui nous sont apparus comme des références incontournables dans l'étude de l'algèbre ; ceci devrait nous offrir de nouvelles perspectives pour raffiner notre questionnement didactique relatif au symbolisme algébrique. Nous aborderons ce panorama, qui ne se prétend en rien exhaustif, à travers l'exposé, dans un premier temps, de réflexions proposées par Jules Vuillemin (1962) et Gilles-Gaston Granger (1994) dans leur projet commun de l'élaboration d'une nouvelle perspective croisée entre science et philosophie. Nous évoquerons ensuite l'ouvrage, unique en son genre, de Désiré André (1909), lequel semble formaliser une idée intuitivement présente chez de nombreux mathématiciens relative au caractère *élégant* de l'écriture mathématique. Nous rassemblerons aussi, dans la quatrième section, quelques écrits nous ayant paru fondamentaux dans cette mise en perspective, en évoquant notamment les travaux de Charles Babbage (1821) et de Marcelo Dascal (1978). Nous conclurons ce panorama en évoquant une oeuvre qui, bien que ne relevant pas d'une analyse philosophique, s'avère une référence incontournable dans bon nombre d'études relatives aux symboles mathématiques : *A History of mathematical notations,* de Florian Cajori (1928)[1]. Notre dernière section sera dédiée à la synthèse du panorama que nous nous sommes proposés de dessiner. Nous y rassemblerons, par la même occasion, certaines résonances qu'ont éveillées en nous ces travaux.

III.1 – Jules Vuillemin et l'*affinité d'inspiration* entre mathématiques et philosophie

L'œuvre de Jules Vuillemin, qui comporte une vingtaine de livres et plusieurs centaines d'articles, manifeste une étonnante diversité dans le questionnement philosophique et va bien au-delà des préoccupations liées à la seule philosophie de la logique, des mathématiques et des sciences en général, auxquelles il est le plus souvent associé. Comme le note Jacques Bouveresse dans un hommage rendu à Vuillemin, « (...) parmi tous les philosophes français contemporains, il est

[1] Nous renvoyons le lecteur au chapitre I pour quelques commentaires relatifs aux travaux de Nesselmann.

probablement l'un des plus complets, en ce sens que son intérêt et ses publications se sont étendus à peu près à toutes les branches et à tous les aspects de la philosophie ».

Une idée centrale marque cependant les réflexions philosophiques de Vuillemin dès le début des années soixante, et teinte dès lors ses recherches: celle du rôle fondamental que jouent la logique et la science pour la philosophie et, plus précisément, du rapport qui existe entre les mathématiques et la philosophie. Cette idée va notamment se révéler le moteur de l'analyse qu'il mène dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* ainsi que dans *La Philosophie de l'Algèbre,* deux ouvrages parus en 1960 et 1962, respectivement. C'est précisément ce dernier ouvrage, référence fondamentale pour la philosophie des sciences, qui a retenu notre attention. En effet, de par sa problématique, ce texte nous a semblé un bon point d'entrée pour approfondir l'analyse relative à l'algèbre et ainsi enrichir notre questionnement didactique.

Dans *La philosophie de l'Algèbre*, l'auteur nous invite à de nombreuses réflexions philosophiques sur les méthodes employées par divers mathématiciens (Descartes, Leibniz, Lagrange, Gauss, etc.), qui lui servent notamment de pivot pour étayer les analogies qu'il effectue avec les méthodes rencontrées en philosophie, une idée qui se révèle centrale dans l'ensemble de son ouvrage.

De cette mise en rapport entre les méthodes mathématiques et la métaphysique, Vuillemin développe en particulier l'idée selon laquelle « le renouvellement des méthodes de celles-là a, chaque fois, des répercussions sur celle-ci [la philosophie] », en évoquant initialement les textes de Platon pour illustrer cette idée. Il souligne, en effet, que l' « occasion du platonisme a été fournie par la découverte des irrationnels », et note que :

> « Dans le *Politique* (...) il [Platon] montre comment l'Etat réel, tout en cherchant à se rapprocher de l'Etat idéal, trouve en lui-même des limites qui empêchent toute confusion et, par là, assigne par avance ces mêmes limites aux pouvoirs d'un tel Etat, par essence imparfait, comme on assigne des limites à l'approximation d'un nombre irrationnel. » [Vuillemin, 1962, p. 4]

L'analyse des méthodes qui figurent dans le champ de la connaissance qu'il dénomme *pure* et notamment dans certains domaines des mathématiques revêt, selon lui, un double intérêt : non seulement elle devrait permettre d'examiner comment une connaissance pure est possible, mais elle devrait permettre également de « critiquer, réformer et définir (...) la méthode propre à la philosophie théorique. » [ibid., p. 5]. C'est ainsi que Vuillemin s'interroge sur les emprunts de la philosophie aux méthodes mathématiques en évoquant la prégnance, dans le discours métaphysique de Descartes, de ce qu'il nomme la *Géométrie algébrique*, ou encore, dans le discours philosophique de Leibniz, de la référence au calcul infinitésimal.

C'est notamment en prenant appui sur les discours de ces deux géomètres que sont Descartes et Leibniz, que Vuillemin expose, dans son *Introduction*, les « rencontres » qu'il perçoit, à différents niveaux, entre les mathématiques et la philosophie. Nous noterons en particulier une illustration de cette mise en regard, articulée autour du couple d'opposés : analyse et synthèse, à partir du discours de Descartes mathématicien, d'une part, et philosophe, de l'autre.

Du texte du mathématicien, Vuillemin retient les principales caractéristiques qui distinguent les deux démarches : tandis que l'analyse invente, découvre et part des effets pour en remonter jusqu'aux causes, la synthèse, au contraire, enseigne, va du particulier pour atteindre le général et part des causes pour en déterminer les effets. Finalement, comme le note Vuillemin : « lorsqu'on décompose une question, c'est par occasion qu'on rencontre les axiomes qu'on doit proposer au départ quand on utilise la composition » [ibid., p.9][2]. De cette double démarche Vuillemin retiendra la réversibilité, possible en mathématiques, entre analyse et synthèse, reversibilité qu'il opposera, dans la suite de son discours, à partir de l'analyse des textes de Descartes philosophe, à l'irréversibilité des méthodes en métaphysique.

Jules Vuillemin se servira aussi de cette analyse pour pointer une distinction fondamentale entre les méthodes mathématiques et celles employées en philosophie : en reprenant les termes kantiens, tandis que les mathématiques pratiquent une méthode ostensive, la philosophie est contrainte à l'emploi d'une méthode discursive. En d'autres mots, tandis que les mathématiques construisent leurs objets à partir d'axiomes « intuitifs », la philosophie ne peut qu'exposer les concepts, en les décomposant, et en appliquant des principes discursifs. Ou encore : le *modus tollens*, utilisé en mathématique, ne peut l'être en philosophie.

En conclusion, nous pouvons dire que dans cet ouvrage, référence incontournable en philosophie, Jules Vuillemin s'intéresse certes à l'algèbre et y mène une réflexion philosophique très pertinante. Cependant, c'est surtout dans le but d'établir des rapports entre les mathématiques et la philosophie que l'auteur se réfère au domaine algébrique, en insistant sur l'étude des méthodes de celui-ci, repérées dans les procédures de différents mathématiciens. Ainsi n'est-il pas surprenant de voir l'importante place que Jules Vuillemin accorde à l'examen du couple analyse-synthèse, deux méthodes bien repérées en algèbre et dont quelques écrits philosophiques semblent illustrer l'usage en métaphysique[3].

III.2 – Gilles Gaston Granger et la dualité opération-objet

Au même titre que J. Vuillemin, G-G Granger, éminent épistémologue des mathématiques de notre temps, s'intéresse aux rapports entre les mathématiques et la philosophie et plus précisément à « *la fonction de matrice conceptuelle que pourraient éventuellement avoir joué des notions philosophiques à l'égard des constructions du mathématicien* » [Granger, 1994, p. 199. Italiques dans

[2] A ce sujet, il est intéressant de reprendre ici le commentaire de Vuillemin : « Et s'il lui est arrivé comme dans l'*Entretien avec Burman* d'attribuer à l'analyse les vertus même de la pédagogie, c'est que Descartes distinguait deux degrés dans la doctrine, dont le plus éminent est d'enseigner aux autres comment on peut inventer.» [Vuillemin, 1962, p.6. Italiques dans l'original].

l'original]. D'une œuvre très riche et diverse nous extrayons un seul recueil d'articles qui nous semble adapté à notre projet : celui intitulé *formes, opérations, objets*.

Si Vuillemin nous propose, nous l'avons vu, une réflexion relative aux emprunts de la philosophie à certains concepts et méthodes mathématiques, c'est le sens inverse de cette relation entre les deux domaines que Granger se propose d'explorer. Cependant, à l'instar de Vuillemin, Granger se sert lui aussi de l'oeuvre de Leibniz pour développer son idée. En effet, ce géomètre présente, selon Granger,

> « (...) l'un des très rares exemples d'une création mathématique qui, authentiquement novatrice sur bien des points, est associée dès son origine et tout au long de son histoire à des vues logiques et métaphysiques où elle trouve son impulsion initiale et l'orientation de son mouvement » [ibid., p.200]

Motivé par l'analyse de la « portée et du point d'application de cette impulsion philosophique », G-G Granger procède à une analyse exceptionnellement fine de la mathématique leibnizienne, en soulignant notamment les origines métaphysiques de sa *pensée symbolique*, en affirmant, par exemple que :

> « Notre esprit humain est lié à la singularité des points de vue, mais la représentation « aveugle » des relations nous permet cependant de transcender cette finitude, et de saisir, à travers la variété des faits concrets, l'unicité de la loi –ou, si l'on veut, de penser en termes finis l'infini qui ne nous est pas accessible. On perçoit déjà en quel sens la Métaphysique leibnizienne a pu jouer dans la création mathématique un rôle véritablement moteur. » [ibid., p. 209]

Et, plus loin, lorsqu'il examine le rôle de la *loi de continuité* dans le Calcul de Leibniz en termes de « méta-principe »[4] :

> « C'est d'abord en effet comme guide de la pensée symbolique que nous l'avons rencontré. Mais il s'agit d'un principe qui, à l'égard des Mathématiques, est vraiment méta-théorique et prend sa source plus haut encore puisque Leibniz n'hésite pas à le désigner parfois comme « le principe de l'ordre général » (Lettre à Bayle, 1687, *in* Erdmann, p.104) par excellence et s'il « réussit » à la fois dans la Géométrie et dans toute la Physique, c'est parce que « la souveraine sagesse qui est la source de toutes choses agit en parfait géomètre ».» [ibid., p. 234]

L'étude de l'oeuvre leibnizienne conduit également G-G. Granger à une analyse philosophique plus spécifique de la symbolique employée par le géomètre et de toute la puissance qu'elle recèle, notamment lorsqu'il traite de « l'invention des déterminants ». Il y souligne en particulier la constance de Leibniz à considérer que « les signes sont d'autant plus utiles qu'ils expriment mieux les relations des choses ».

Les dix-neuf études qui composent le recueil ne se limitent cependant pas à l'analyse de la résonance des concepts philosophiques dans les concepts mathématiques. Celles-ci s'articulent en effet

[3] Plus particulièrement, Vuillemin montre, à travers une multitude d'exemples, dans quelle mesure l'algèbre assure la réversibilité de l'analyse et de la synthèse, tout en suggérant une meilleure adéquation de cette dernière à la métaphysique.

[4] Cf. sur ce point l'article de M. Serfati intitulé « The principle of continuity and the « paradox » of leibnizian mathematics », à paraître dans *Controversies* (Dascal, M. et Fritz, G. Eds.).

autour d'un thème central plus large : celui du rapport des formes aux contenus et de l'abstrait au concret dans les sciences. Tout au long de son ouvrage, G-G Granger s'intéresse de fait à montrer la multiplicité des applications, dans les sciences, de ce qu'il appelle la *pensée formelle* et plus précisément à quel point « le scientifiquement connaissable » est dépendant des déploiements de celle-ci.[5]

Nous noterons en particulier, dans l'article intitulé *Contenus formels et dualité*, l'exploitation faite par Granger du concept de dualité, au sens mathématique du terme. De celui-ci il retient essentiellement deux caractéristiques. Tout d'abord le fait que s'y exprime « l'idée de traduction d'une propriété ou d'un système par une autre propriété ou par un autre système au moyen d'un *renversement de points de vue*, qui en conserve en un certain sens la forme». Cette idée peut être illustrée par le transfert de problèmes initialement posés en géométrie euclidienne vers la géométrie projective, où l'on passe du point à la droite et d'alignement de points à des concours de droites. Puis, le fait que la dualité exprime particulièrement bien l'idée de « permutation entre un système d' « objets » et le système d'opérations qui s'y appliquent », essentielle en mathématiques. Ainsi, ajoute-t-il,

> « (…) le mathématicien, partant d'un espace vectoriel quelconque défini sur un corps de base, appelle espace dual l'espace des formes linéaires qui appliquent les vecteurs de l'espace primitif sur les éléments du corps. Cet espace d'opérateurs étant lui-même un espace vectoriel, qui se trouve, dans le cas fini être isomorphe à l'espace d'objets (les espaces primitifs) dont il procède. » [ibid. p.54]

Granger reprend ensuite cette notion de dualité, centrale dans ce recueil d'articles, en lui associant la particularité d'être une « catégorie primitive de la pensée ». Cette idée s'avère également fondamentale pour étudier l'opposition, telle qu'il la perçoit, entre forme et contenu et, plus précisément pour exposer les multiples significations que cette opposition revêt dans le fonctionnement du symbolisme, lorsque cette dernière s'applique au couple opération-objet. Ainsi précisera-t-il :

> « Ce qui est forme à un niveau peut devenir contenu à un niveau supérieur d'organisation, de sorte que la caractérisation comme forme n'a de sens que si on lui contrapose un contenu, et que, d'une certaine manière, il y a des degrés du formel. (...) les additions et multiplications de l'arithmétique deviennent des entités plus générales soumises aux lois de degré supérieur d'une algèbre « universelle » ; l'opération d'intégration devient l'entité : « fonctionnelle linéaire », objet d'une analyse nouvelle. La véritable opposition est celle du couple opération-objet. Un niveau opératoire supérieur détermine comme nouvel objet ce qui était opératoire en acte» [ibid., p.151]

Et plus loin il conclut :

---

[5] Afin de clarifier cette notion, nous renvoyons le lecteur à la définition, donnée par Granger, du thème central de son recueil : c'est l'étude « de la signification, des pouvoirs et des limites de la *pensée formelle* comme instrument de connaissance scientifique, et de ses rapports aux contenus ». Nous noterons également, dans sa conclusion, un renvoi à cette notion, lorsque Granger écrit, en mettant en regard pensée formelle et philosophie : « Si la philosophie est, comme je le pense, également une *connaissance*, il est naturel de se demander si et comment ces métaconcepts [forme, opération et objet] y interviennent ; en d'autres termes, quel rôle peut jouer en philosophie la *pensée formelle*. »

« Nous dirons plutôt que la mathématique vise à construire la totalité des formes d'objets possibles, et pas seulement d'objets construits dans l'intuition sensible (...). Il faudrait préciser peut-être : la totalité des formes d'objets *constructibles dans l'intuition symbolique.* » [ibid., p. 156. Italiques dans l'original]

Nous observons une résonance certaine avec ce qui précède ; les préoccupations développées par Vuillemin, et en particulier l'étude des rapports entre les mathématiques et la métaphysique, faisant aussi objet des travaux exposés ici. Cependant, tandis que ce dernier propose une réflexion philosophique générale sur l'algèbre, celui-là s'interroge plus spécifiquement sur l'articulation entre forme et contenu, dans une étude qui ne se restreint pas à ce domaine. Mais si cette articulation a trouvé des applications dans diverses sciences, comme le montre Granger dans son recueil, elle est particulièrement pertinente dans le contexte de l'algèbre, où les signes, *lato sensu*, jouent un rôle primordial. C'est en ce sens, nous semble-t-il, que l'ouvrage de Granger se rapproche davantage de notre thématique de recherche.

Nous souhaitons conclure cette section en retenant surtout des textes de Granger une réflexion profonde relative à la pensée formelle, ainsi qu'à l'articulation des trois métaconcepts philospohiques que sont les formes, les opérations et les objets. Comme nous l'avons déjà souligné, les textes de G-G Granger relèvent de préoccupations, dans le cadre philosophique, qui se rapprochent davantage de notre sujet de recherche. Celles-ci sont toutefois inscrites dans le contexte d'une philosophie générale ; l'écriture algébrique en soi n'est pas l'objet d'étude. Dans les paragraphes qui suivent, notre attention sera au contraire centrée sur des ouvrages où cette analyse est davantage mise en valeur. Nous verrons cependant que, si l'accent est donc bien mis sur les notations mathématiques, c'est par contre bien souvent au détriment de l'analyse philosophique ou épistémologique.

III.3 – Désiré André et l'*élégance* des notations mathématiques

A travers l'étude des notations mathématiques, Désiré André, dans l'ouvrage intitulé *Des Notations Mathématiques – Enumération, choix et usage*, nous propose aussi une certaine mise en regard entre mathématiques et philosophie, qu'il décrit ainsi: « les Mathématiques ont leur côté philosophique et artistique. Les notations excellentes présentent aux personnes initiées à ce langage une sorte de charme qui les entraîne vers l'étude » [André, 1909, p. XVI]. C'est cependant seulement dans son *discours péliminaire* que l'auteur évoquera ce parallèle dressé entre les deux disciplines; il choisira, dans la suite, de mettre l'accent sur ce volet artistique des mathématiques ainsi annoncé.

L'association du qualificatif « artistique » à une discipline telle que les mathématiques est argumentée dans l'ensemble de l'ouvrage d'André, et ceci à deux niveaux différents. Nous la retrouvons, d'abord, dans la description de domaines spécifiques tels l'algèbre et l'analyse, lorsqu'il insiste sur leur « luminosité » , « créativité » et « universalité » et plus précisément dans les réflexions qu'il mène autour de leurs notations. « Il est certain », écrit-il par exemple, « que les systèmes de formules réputés parfaits présentent pour l'œil qui les regarde, comme pour l'oreille qui les entend lire à haute voix, une sorte d'harmonie visuelle ou musicale, c'est-à-dire une jouissance esthétique d'un ordre très élevé » [ibid., p. XVI]. Cette qualification d'« artistique » pour l'algèbre lui sert également pour préciser la nature de l'étude qu'il se propose d'entreprendre:

> « Cette étude, semblable en cela à l'Algèbre, est à la fois une science et un art: une science, puisqu'elle nous fait connaître les notations usitées, leur forme, leur signification, leur origine, leur histoire; un art puisqu'elle nous donne des règles sûres pour les bien choisir et les bien employer. » [ibid., p.V].

Vu l'importante place qu'elles occupent en algèbre et en analyse, les notations se doivent, selon André, d'être « correctes, bien choisies, bien employées, en un mot (…) excellentes. » [ibid., p. XV]

De ces qualificatifs des notations mathématiques émerge le triplet qui sous-tend son ouvrage et en délimite les différentes parties: l'énumération, le choix et l'usage[6] des notations mathématiques.

La première partie, telle que l'auteur la définit, est dédiée à la « science des notations » ; on y trouve un exposé des notations courantes dans les mathématiques du début du XXe siècle, aussi bien relatives aux signes servant à désigner des nombres (entiers, fractionnaires, indéterminés, etc.) qu'aux signes de calcul (d'opérations, de fonctions, de relations, etc.). Nous y trouvons également l'inventaire de signes employés dans des domaines spécifiques des mathématiques, autres que l'algèbre et l'analyse déjà cités, tels la géométrie qu'il dénomme « pure », la géométrie analytique ou les « mathématiques appliquées ». Ainsi évoquera-t-on, pour illustrer le degré du détail rencontré dans cet ouvrage, la façon dont André décrit, dans la règle 333, les courbes de niveau utilisées en topographie:

> « (…) les courbes de niveau sont les courbes constituées sur le terrain par les points ayant une cote donnée. On représente ces lignes par leurs projections et par leur cote, écrite en chiffres à côté de quelques-uns de leurs points. On marque, en général, les courbes de niveau correspondant à des altitudes en progression arithmétiques, par exemple de 10^m en 10^m(…). » [ibid., p. 131]

Les deux parties suivantes font référence au volet « artistique » de son ouvrage ; ce sont, comme André le précise, « l'art de les choisir [les notations mathématiques] » et « l'art de les employer ». En d'autres mots, ce sont un ensemble de règles qui doivent présider au choix et à l'usage des notations. Dans la deuxième partie, en particulier, l'auteur précise l'ensemble des conditions d' « excellence » que doivent satisfaire les signes, à savoir : la « netteté », la « précision », le « rappel des propriétés de l'objet » ainsi que le « rappel des rapports entre les objets »[7]. Il veillera, tout au long de cette seconde partie, à mettre en évidence l'importance de l'immuabilité du signe ainsi que son univocité : « (…) De plus, quand le choix est fait, il faut qu'on s'y tienne. Le signe ne doit jamais

[6] Le bon usage, dirons-nous.
[7] Leibniz aurait sûrement acquiéscé.

changer ; il doit être invariable, immuable » [ibid., p. 161] et, plus loin: « *deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates* » [ibid., p.238. Italiques dans l'original].

Le texte d'André, unique en son genre[8], a ainsi pour objectif d'attirer l'attention sur l'importance, voire la nécessité d'écrire « correctement », tout en fournissant aux mathématiciens de son époque un ensemble de règles à suivre. Il constitue ainsi une sorte d'ouvrage de référence pour tous ceux désireux de produire un texte mathématique correctement écrit. Nous retrouvons cet objectif clairement défini lorsque l'auteur précise: « Nous voudrions que, grâce au présent Ouvrage, tout géomètre un peu attentif pût arriver à écrire bien, par principes, comme les mieux doués écrivent bien tout naturellement, par une sorte d'instinct. » [ibid., p. XVIII].

Si l'auteur annonce, lorsqu'il définit l'objectif de son ouvrage, qu'il accordera une certaine place à l'analyse historique des notations étudiées, celle-ci n'est pourtant qu'allusive et anecdotique, et ne constitue pas l'objet principal de l'ensemble de l'écrit. Lors de l'énonciation des règles régissant l'usage des signes, André veille toutefois à fournir au lecteur, autant que possible, des « remarques historiques » (dénommées en tant que telles dans son *discours préliminaire*). Ainsi notera-t-il, par exemple, lorsqu'il se propose d'étudier les signes de relation, l'attribution à Recorde du signe « = », tout en soulignant son absence dans les ouvrages de Descartes, pourtant parus bien postérieurement. De façon analogue, se contentera-t-il de citer Libri lors de l'analyse des signes voués à représenter des nombres indéterminés : « Si l'on croit Libri, l'usage des lettres pour représenter des objets indéterminés remonterait à Aristote. Pour désigner les nombres et les quantités, il remonte seulement à Viète. » [ibid., p. 40]. Sans introduire aucunement de jugement de valeur, nous noterons sur ce point l'absence, dans l'ouvrage, d'une analyse historique ou épistémologique quant à l'évolution des notations mathématiques. Même si celles-ci se trouvent inventoriées avec le plus grand soin, ce sont plutôt les minuties de l'écriture qui occupent le devant de la scène. Ainsi insistera-t-il par exemple sur la typographie des signes, lorsqu'il aborde « la variété d'un alphabet », en suggérant que

> « les caractères *droits* doivent être bien *perpendiculaires* à la ligne principale d'écriture; les caractères *penchés* doivent être nettement *inclinés* sur cette ligne, doivent faire, par exemple, avec elle, un angle de 50° ou 60°. Il ne faudrait pas employer en même temps deux alphabets composés de lettres penchées ne différant entre elles que par le plus ou moins d'inclinaison. » [ibid., p. 44. Italiques dans l'original]

Et si la place qu'André accorde au détail de l'écriture mathématique peut sembler à quelques lecteurs excessive et déraisonnable, il tente de désarmer ceux-ci en affirmant: « Est-il, d'ailleurs, beaucoup plus ridicule de s'occuper des minuties de l'écriture pour la rendre excellente que des minuties du raisonnement pour le rendre rigoureux? » [ibid., p. XVIII] –un argument sans doute bien discutable.

Finalement, si André insiste sur l'importance d'une écriture « excellente » pour les mathématiques, c'est qu'il perçoit en celle-ci de multiples avantages, lesquels sont mis en exergue dans

[8] Nous rajouterons que le texte d'André est très peu connu.

son *discours préliminaire*. Ainsi dira-t-il, par exemple, des écrits mathématiques autrefois exprimés en langage ordinaire: « Quelles complications! Quelles longueurs! » [André, 1909, p. VII] et leur opposera les notations mathématiques qui apportent, en reprenant ses termes, « d'énormes abréviations et simplifications ». De même évoquera-t-il les avantages de celles-ci « pour l'œil et l'esprit », en soulignant un certain « soulagement » de la mémoire, un point qui avait été avant lui, dès la fin du XVIIe siècle bien mis en évidence. Ceci sera repris dans la section suivante et servira de fil conducteur pour l'exposition de certaines idées, philosophiques celles-ci, retenues de la lecture des écrits de Babbage (1821) et de Dascal (1978).

III.4 – Sur l'avantage des notations mathématiques - Babbage et Dascal

La mise en évidence des divers « avantages » des notations mathématiques s'avère, dans un tout autre registre cependant, également une des motivations principales de l'article étendu de Babbage, O*n the Influence of Signs in Mathematical Reasoning*, lorsqu'il y étudie certains des rapports entre « notations » et « raisonnement » mathématiques. Nous y retrouvons ainsi des caractéristiques des notations mathématiques déjà évoquées par André, exposées dans le paragraphe précédent ; nous nous contenterons ici d'en exposer quelques unes. La première idée mise en valeur par Babbage est relative à l' « information maximale » qu'il juge être contenue dans les notations mathématiques ; par la même occasion, l'auteur souligne les avantages qu'elles apportent au raisonnement. Selon Babbage,

> « The quantity of meaning compressed into small space by algebraic signs is another circumstance that facilitates the reasonings we are accustomed to carry on by their aid.» [Babbage, 1821, p.330]

et, plus loin:

> « the invention of algebra (...) presented to the eye a picture perfect in all parts, disclosing at a glance, not merely the conclusion in which it terminated, but every stage of its progress.» [ibid., p.330-331]

Et, lorsqu'il évoque les différences entre les différents registres d'écriture mathématique, le symbolique, d'une part, et le rhétorique, de l'autre, Babbage va jusqu'à parler de « triumph of signs over words »[9].

Les avantages des notations employées en algèbre par rapport à celles qui relèvent du domaine géométrique sont également traités dans le texte de Babbage, plus particulièrement lorsqu'il oppose les notations algébriques qui permettent la traduction de la généralité, aux représentations géométriques

[9] Cette phrase est très représentative de la philosophie de l'école de Cambridge, dont Babbage fut un membre éminent.

qui ne peuvent échapper à une certaine « particularisation » dans la figure considérée[10]. Ainsi écrira-t-il :

> « The signs used in Geometry, are frequently merely *individuals* of the *species* they represent; whilst those employed in Algebra having a connection purely arbitrary with the species for which they stand, do not force on the attention one individual in preference to any other. » [ibid., p. 338. Italiques dans l'original]

Nous noterons finalement l'idée présente et mise en valeur tout au long de l'ouvrage de Babbage, d'une certaine « objectivité » des signes mathématiques, qui préserverait le mathématicien de toute « distraction », de toute information superflue :

> « (...) when letters only are employed, the functional characteristics convey no meaning except that on which the force of the reasoning depends ; but if numbers are used, they convey, besides this signification, a multitude of others, which distract the attention, although they are quite insignificant in producing the result. » [ibid., p. 343]

Nous retrouvons des préoccupations analogues dans l'ouvrage que Marcelo Dascal (1978) consacre à la *Sémiologie de Leibniz*, en analysant la *caractéristique géométrique* leibnizienne : « Mais le but principal d'une telle notation n'est pas de servir pour la *description* des choses – auquel cas il serait mieux d'avoir des *reproductions* de ces choses ou les choses elle-mêmes – mais plutôt servir au raisonnement (...) » [Dascal, 1978, p. 216]. Il analysera cependant surtout le caractère *autarcique* des notations mathématiques dans les conceptions de Leibniz :

> « Avec l'aide d'un tel système de signes, les déductions et démonstrations, les vérifications et épreuves, ainsi que d'autres opérations logiques, se font sans onérer nos pouvoirs de raisonnement et jugement. Tout s'y fait à partir des caractères, et tout se déroule au niveau des caractères eux-mêmes. » [ibid., p.219]

Si Babbage présente ainsi le principe d'économie des notations mathématiques comme une de leurs caractérstiques à part entière, Dascal le situera par privilège dans ce qu'il appelle, à la suite de Leibniz, leur « autarcie ».

Dans la section suivante, nous aborderons enfin un ouvrage qui, bien que ne relevant pas du registre philosophique, s'avère incontournable pour compléter toute analyse à l'égard des symboles mathématiques : *A History of Mathematical Notations*, paru en 1928 sous la plume de Florian Cajori.

III.5 – Une référence historique des notations mathématiques : Cajori

.

Dans les deux volumes qui composent son ouvrage Cajori propose au lecteur un inventaire, témoignant une érudition remarquable, des différents signes repérés dans les écrits mathématiques, de l'époque babylonienne jusqu'au début du XXe siècle.

[10] Cf. sur ce point l'article *La dialectique de l'indeterminé, de Viète à Frege et Russel,* de M. Serfati (1999).

La motivation qui a guidé l'auteur dans son entreprise (« Our endeavor has been to do justice to obsolete and obsolescent notations, as well as those which have survived and enjoy the favor of mathematicians of the present moment ») est repérable tout au long de son ouvrage et participe à l'organisation même de celui-ci. Les différents signes sont, en effet, d'abord exposés selon leur « genre » (nombres, signes utilisés en algèbre, signes spécifiques aux opérations élémentaires, etc.) et ensuite seulement abordés à travers l'examen de leur emploi par différents auteurs. L'accent étant mis sur la diversité des signes employés, Cajori propose, pour la plupart des « genres » abordés, des paragraphes entièrement dédiés aux signes créés par certains auteurs et qui n'ont jamais été repris ailleurs. C'est ainsi que nous retrouvons, par exemple, les signes qu'il dénomme « unsuccessful symbols », tel le rectangle utilisé par Hérigone pour désigner le produit de deux facteurs séparés par une virgule: ▭ 5+4+3, 7~ 3, pour désigner, en termes modernes : (5+4+3).(7-3).

Du texte de Cajori, bien qu'il soit dépourvu de toute analyse philosophique ou épistémologique, nous retiendrons l'admirable recherche de l'exhaustivité. La diversité des signes explorés, le nombre d'auteurs cités et l'empan des périodes recouvertes par son étude, ont, à juste titre, fait de cet ouvrage une référence incontestable pour un grand nombre de recherches portant sur les notations mathématiques.

III.6 – Synthèse

L'étude de ces différents auteurs nous a permis de rencontrer des questionnements qui s'avèrent aussi riches que variés, tant par l'objet d'étude considéré que par la nature des réflexions qui y sont menées, autour de l'algèbre.

De ce tour d'horizon semblent émerger pour nous essentiellement deux pôles, indépendamment de toute chronologie.

D'une part se trouvent des ouvrages traitant de l'algèbre en général, de ses méthodes, de son formalisme. Nous les avons rencontrés ici à travers les écrits de J. Vuillemin et G-G Granger, qui proposent une réflexion philosophique authentique sur les éléments constitutifs de l'algèbre et leurs articulations avec la philosophie. Le texte de Granger, bien que se situant dans la lignée philosophique de Vuillemin, se distingue cependant de ce dernier. Nous y trouvons, en effet, un discours davantage bâti autour de la question du formalisme mathématique, plus précisément sur les *formes* mathématiques et leurs caractéristiques.

C'est en ce sens que nous le situerons comme un point de transition vers le deuxième pôle rencontré dans nos lectures, celui des textes où une réflexion sur les notations mathématiques en soi est privilégiée. Là encore, on peut distinguer les différents textes. Car si, dans ce second versant, l'accent est bien mis sur les notations mathématiques, c'est bien souvent par contre au détriment de l'analyse philosophique, constitutive des premiers textes présentés. Ainsi, si les ouvrages de Cajori et

André sont totalement dédiés aux notations mathématiques, dans des registres entièrement différents cependant, le premier fournissant un inventaire minutieux des signes et le second un ensemble de règles guidant le « bon usage » de celles-ci, tous deux excluent, malgré l'intérêt qu'ils présentent, toute ouverture vers une analyse philosophique ou épistémologique. Finalement, c'est dans les textes de C. Babbage et M. Dascal que nous retrouvons une analyse véritablement philosophique/épistémologique. Cependant, tandis que celui-là nous propose une réflexion générale qu'André viendra rejoindre sur plusieurs points, celui-ci se sert des mathématiques leibniziennes pour dégager certains des différents principes philosophiques organisant la *sémiotique de Leibniz*.

Certes nous retrouvons, parmi ces écrits divers, des réflexions pertinentes pour notre propos relatif au symbolisme. Cependant, il nous semble que le discours constituant la plupart des travaux épistémologiques précités relève d'une réflexion philosophique d'ordre général plutôt que des formes symboliques en soi telles qu'elles puissent devenir un outil opérationnel pour l'analyse didactique. C'est pourquoi, pour approfondir notre réflexion épistémologique, nous nous sommes intéressés dans le chapitre suivant aux travaux de Michel Serfati, lequel fait référence à certaines questions épistémologiques soulevées par les auteurs *supra* cités et qui propose une réflexion rétrospective, sans précédent, d'un mathématicien, relative à la mise en place de l'écriture algébrique. Mais, avant de nous lancer dans cette étude, nous voudrions évoquer un certain nombre de résonances didactiques que ces lectures ont éveillées en nous.

Nous avons perçu, à travers une première approche des travaux de J. Vuillemin et G-G. Granger, le rôle que jouaient certaines oppositions et dualités dans la réflexion philosophique sur l'algèbre et le symbolisme mathématique : l'opposition classique en mathématiques entre les démarches d'analyse et de synthèse chez Vuillemin par exemple, les dualités forme/contenu, opération/objet chez Granger. Oppositions et dualités ont joué et jouent aujourd'hui encore, un rôle fondamental en didactique. Certaines de ces dualités sont de caractère général : elles ne concernent pas spécifiquement l'algèbre. Ainsi en est-il de la dualité **outil/objet** introduite par Régine Douady (1984). D'autres dualités, sans être spécifiques à l'algèbre, ont vu leur émergence didactique liée à des recherches concernant l'algèbre et les fonctions. Ainsi en est-il de la dualité **opérationnel/structurel** introduite par A. Sfard déjà évoquée dans le chapitre I, de la dualité **processus/objet** introduite par E. Dubinsky, et réélaborée à travers la notion de **procept** lui rajoutant une dimension sémiotique par D. Tall (Tall & Gray, 1994), (Tall, 2000). D'autres enfin sont spécifiques de l'algèbre et il n'est pas surprenant de retrouver à ce niveau la classique opposition analyse/synthèse, reprise par divers auteurs et déjà présentée elle aussi dans le chapitre I. Si certains des couples que nous venons de mentionner sont perçus en termes d'opposition, c'est le cas notamment du couple analyse/synthèse, ou pris dans des visions hiérarchiques comme c'est le cas en ce qui concerne le couple processus/objet chez E. Dubinsky, c'est cependant en général plutôt en termes dialectiques que les rapports entre leurs éléments sont pensés et travaillés.

Mais si nous retrouvons à l'œuvre dans le champ didactique des catégories de pensée qui, par l'accent mis sur oppositions et dualités, nous rapprochent du champ philosophique que nous avons rencontré à travers ces quelques lectures, il serait vain nous semble-t-il de vouloir forcer trop loin la recherche d'analogies. Les oppositions, les dualités identifiées, ne sont à l'évidence pas travaillées de façon semblables, elles ne servent pas les mêmes desseins.

Ce qui fait l'objet des travaux philosophiques cités, c'est l'étude de la science mathématique dans son processus de construction historique ou c'est la science déjà construite et établie. Oppositions et dualités sont mises au service de l'étude des rapports entre mathématiques et philosophie ou au service de l'étude de ce qui fait la puissance des méthodes mathématiques, des formes symboliques que cette science utilise.

Dans le travail didactique, leur fonction est autre. Si ces catégories ont émergé, c'est d'abord comme des moyens d'approcher et comprendre certaines difficultés résistantes rencontrées par les élèves dans leurs apprentissages mathématiques, c'est aussi pour pointer certains dysfonctionnements des systèmes d'enseignement qui freinent ou font obstacle aux apprentissages visés. Ainsi en est-il de la distinction outil/objet. A sa source, se trouve le constat de ce que l'on pourrait qualifier d' « inversion épistémologique » : alors qu'historiquement les notions mathématiques apparaissent le plus souvent d'abord comme des outils implicites puis explicites de l'activité mathématique, et ne deviennent qu'ensuite des objets clairement identifiés, étudiés pour eux-mêmes ou dans leurs relations avec d'autres objets, c'est généralement l'inverse dans l'enseignement, où l'on présente d'emblée les objets sous une forme la plus aboutie possible avant d'essayer de les constituer en outils de l'activité mathématique. Cette inversion épistémologique est, pour le didacticien, la source de difficultés majeures pour un grand nombre d'élèves et contribue fortement à faire des mathématiques une science élitiste. De la même façon, l'opposition analyse/synthèse a été mise au service de la compréhension de ce qui sépare la pensée arithmétique avec laquelle les élèves se sont familiarisés progressivement pendant les années de l'école élémentaire et la pensée algébrique dans laquelle on va leur demander d'entrer au collège. Et elle a servi aussi à montrer à quel point les systèmes d'enseignement aident peu les élèves à prendre la mesure des différences fondamentales existant entre ces formes de pensée et à opérer les reconstructions cognitives nécessaires pour y faire face.

Dans les travaux didactiques, la puissance des méthodes et du symbolisme mathématique apparaissent à l'évidence, mais le problème qui est posé c'est celui de l'accès des élèves et étudiants à cette puissance, un accès reconnu comme problématique. Par exemple l'économie que permet le symbolisme mathématique algébrique est pointée par un chercheur comme D. Tall qui emploie des termes voisins de ceux de C. Babbage, s'exprimant lui aussi en termes de « compression d'information ». Mais ce qui est l'objet de son attention, ce sont les processus cognitifs en jeu dans l'accès à ce symbolisme. Ceci le conduit notamment à montrer comment les rapports au symbolisme que se forgent les élèves au cours de leurs premiers apprentissages numériques influencent leur interprétation du symbolisme algébrique, cette influence étant source d'erreurs très résistantes chez un nombre non négligeable d'élèves. La notion de procept[11], qu'il introduit dans le cadre général de la dualité processus/objet, est mise au service de cette analyse. Selon Tall :

> « An elementary process is the amalgam of three components : a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object […] A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object" [Gray & Tall, 1994, p.121].

La puissance de la pensée proceptuelle réside selon lui dans la compression qu'elle permet. En reprenant ses termes :

> « Proceptual thinking is characterized by the ability to compress stages in symbol manipulation to the point where symbols are viewed as objects that can be decomposed and recomposed in flexible ways. » [ibid., p.132]

Et D. Tall montre que, dans les premiers apprentissages numériques, c'est la dimension *processus* du procept qui domine, renforcée qu'elle est par les pratiques et par le fait que les écritures symboliques en jeu sont exécutables : l'expression « 3+2 » est ainsi lue par les élèves comme une injonction de calcul et non comme la représentation symbolique d'un nombre. Ceci crée, lorsque interviennent des expressions algébriques et, avec elles, ce que D. Tall dénomme des **template procepts** qui ne peuvent renvoyer cette fois qu'à des processus potentiellement exécutables, un profond désarroi chez certains élèves. Une expression comme « $3+2x$ » ne peut-être acceptée telle qu'elle, en particulier comme résultat, car elle n'est pas associée à un objet ; elle doit être calculée jusqu'au bout et, pour conduire ce calcul qui doit entraîner la disparition de tout signe opératoire apparent, les élèves inventent bien souvent des règles comme celle, bien connue, consistant ici à condenser la forme symbolique « $3+2x$ » en « $5x$ »[12].

De la même façon, si dans les écrits philosophiques rencontrés, nous avons vu soulignés la puissance du calcul aveugle en algèbre et l'intérêt de notations détachées du contexte et porteuses seulement de ce qui permet de les rendre opératoires, nous voyons ces mêmes caractéristiques devenir un objet d'attention dans le champ didactique, parce que l'accès à cette puissance est loin d'aller de soi. Avant d'être productrice, la potentialité qu'offre l'algèbre de développer un « calcul symbolique aveugle » est souvent source pour les élèves de dérapages formels. Elle est associée à la perte de repères concernant l'activité mathématique et son sens. Et c'est pourquoi les didacticiens vont s'attacher à comprendre ces difficultés et à élaborer des itinéraires didactiques qui permettent d'assurer, pour le plus possible d'élèves, une transition réussie entre les calculs de l'arithmétique, complètement pilotés par le contexte et les calculs algébriques où il faut savoir, pour profiter de la puissance de l'algèbre, s'affranchir du contexte, et donner une direction donc du sens au calcul, en en pilotant les formes symboliques. Dans cette entreprise, comme on peut aisément le concevoir, il y a lieu d'organiser une entrée progressive dans les formes symboliques conventionnelles de l'algèbre, en permettant aux notations introduites de perdre progressivement ce qui les attache de façon trop particulière aux objets dénotés pour gagner en puissance opératoire. C'est l'objet de travaux comme

[11] Cette notion sera reprise ultérieurement.

ceux de L. Radford déjà mentionnés dans le chapitre I qui mettent en évidence une créativité symbolique des élèves indéniable mais aussi le fait que les premiers symboles spontanément introduits par ceux-ci portent très fortement la marque de ce qu'ils sont censés représenter. Mais cette créativité symbolique et le long processus qui a conduit historiquement à la stabilisation sur les symboles, conventionnels aujourd'hui, dont l'ouvrage de Cajori témoigne, ne peut trouver dans l'institution scolaire, même si elle est attentive à sa nécessité, qu'un espace de vie très contraint. Là encore, nous mesurons sans difficulté les différences qui séparent les deux champs de réflexion, même si des ponts entre eux peuvent être établis comme nous essayons de le faire dans cette recherche.

[12] Ce point sera ré-élaboré dans la suite.

CHAPITRE IV – EPISTEMOLOGIE ET DIDACTIQUE : UN REGARD CROISE SUR L'ETUDE DES SYMBOLES MATHEMATIQUES

Dans le cadre de sa thèse de doctorat en philosophie intitulée *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Michel Serfati explicite « en quoi l'écriture symbolique a décisivement contribué à l'invention en mathématique même ». Il y fait une étude épistémologique, par le biais de son évolution historique, de la constitution de l'écriture symbolique mathématique. Nous reprendrons dans le présent travail le schéma adopté par M. Serfati comme guide dans l'analyse de cette évolution afin d'établir, le plus souvent possible, un lien entre l'épistémologie et la didactique des mathématiques. Nous nous proposons plus particulièrement de déceler les contributions que l'épistémologie des sciences peut apporter aux travaux déjà menés en didactique des mathématiques, en nous guidant des questions suivantes : Quels éléments l'épistémologie peut-elle apporter aux analyses didactiques menées à propos des symboles algébriques ? Plus précisément, en reprenant le découpage de l'organisation de l'écriture symbolique proposé par M. Serfati examiné dans ce chapitre, et en analysant les travaux didactiques ayant trait aux différentes « figures », quels liens peut-on établir ; y retrouve-t-on en particulier des résonances ?

IV.1 - Les six figures de la représentation

Michel Serfati propose un découpage de l'organisation de l'écriture symbolique en six volets, dénommés **figures de la représentation.** En empruntant les termes de M. Serfati, ce sont :

1. La représentation du requis
2. La représentation du donné
3. La représentation des instructions opératoires élémentaires
4. La représentation de l'enchevêtrement des instructions
5. La représentation de la mise à égalité
6. La représentation des concepts composés

Nous allons à présent décrire de façon succincte chacune de ces représentations reprenant les définitions fournies par M. Serfati ; nous limiterons les prochains paragraphes aux principales caractéristiques des figures de la représentation, reportant ainsi nos commentaires aux sections suivantes.

IV.1.1 - La représentation du requis

La question de la recherche d'un élément numérique inconnu est certainement l'un des principaux problèmes posés depuis les débuts des mathématiques.

Les Egyptiens non seulement posaient des problèmes arithmétiques (concernant la répartition de bière, graines ou pains) mais recherchaient également des solutions à des questions ne faisant allusion à aucun objet concret pour lesquelles il n'était plus question uniquement d'effectuer des opérations entre des nombres donnés. Ainsi n'est-il pas rare de retrouver, parmi les problèmes du Papyrus de Rhind ou Ahmes, des problèmes posés de façon rhétorique qui consistaient à trouver l'équivalent -en employant la terminologie actuelle- de solutions d'équations linéaires du type x+ax=b ou x+ax+bx=c, où a, b, c sont donnés et où x est inconnu[1]. La dénomination de la valeur inconnue et recherchée restait cependant, comme chez les Hindous et les Arabes, fortement liée au contexte du problème posé. Si les Egyptiens cherchaient un « tas », les Arabes se référaient la plupart du temps à des possessions ou des biens et les Hindous évoquaient souvent les couleurs. Tous ces problèmes, il convient de le souligner, étaient exposés dans le registre rhétorique, où les énoncés et calculs se faisaient dans la langue naturelle.

Et il en fut ainsi jusqu'au Moyen Age et à la Renaissance quand, en Europe, la dénomination de cet élément recherché se décontextualisa peu à peu, incorporant le terme de *res* en latin, *coss* (chose) en allemand ou encore *cosa* en italien. La représentation de l'élément recherché existait déjà du temps des travaux de Diophante d'Alexandrie, qui décida de la désigner par la dernière lettre de l'alphabet, le zéta : ζ. Cependant Diophante n'utilisa jamais qu'un seul signe pour désigner l' « inconnu »[2] et, comme le note Serfati, « cette limitation (…) limita fortement les capacités opératoires de l'algèbre diophantienne ». Ce ne fut qu'à partir de 1525, au travers de *Die Coss* de Rudolff, que la « chose » acquit un signe spécifique, le ꝶ, repris par les auteurs cossiques qui le succédèrent.

Cette figure eut d'ailleurs une bien longue vie, puisque son usage perdura jusque dans *Cogitationes Privatae*, de Descartes (une représentation cependant abandonnée dans *La Géométrie*, 1637). Se succédèrent ensuite diverses tentatives de remplacer ce symbole par un autre et ce fut Descartes qui remplaça, de façon définitive, le symbole ꝶ par les dernières lettres minuscules de l'alphabet latin.

IV.1.2 - La représentation du donné

Même si l' « inconnu » intervenant dans les problèmes « en nombres » était désigné par différentes représentations avant que la notation de Descartes ne fut universellement acceptée, un critère semblait cependant être respecté par tous les auteurs : choisir un symbole le plus éloigné possible de la représentation du donné afin d'éviter toute confusion et dans le souci de spécifier ainsi

[1] *A History of Mathematics*, Carl B. Boyer.

[2] Ou, rajoutons-le, pour désigner le requis car jusqu'à Descartes en effet, le requis et l' « inconnu » étaient confondus dans les problèmes mathématiques.

l' « inconnu ». Ce choix, nous avons vu, se traduisit par la mise en place du *zéta* dans les écrits de Diophante, du 𝔵 dans l'école cossique ou encore d'un signe figuré « qui fut distinct de toutes les inscriptions exposées sur la feuille, ou sur l'abaque, numériques ou opératoires » [Serfati, 1997, p.43] dans les écrits des géomètres médiévaux. En effet, avant Viète, les problèmes de calcul distinguaient les deux types d'informations présents dans l'énoncé (le requis et le donné) par des représentations de « natures » différentes : toute apparition d'une lettre dans le texte indiquait la présence d'une inconnue (dont la valeur devait être déterminée), tandis que le donné était désigné uniquement par des signes représentant des nombres ; celui-ci était de cette façon connu de tous. « (…) Il y avait donc bien », comme le note Serfati,

> « convention universelle d'interprétation, portant sur la nature indéterminée de la chose et la persistance de sa substance, mais non évidemment sur la valeur elle-même, puisque celle-ci était précisément inconnue. Dans le calcul avant Viète, le connu de tous se confondait donc avec le numérique et lui-même avec le "donné". Dans ces conditions, l'énoncé d'un problème numérique entremêlait ces quatre types de signes seulement : "chiffres" interprétés comme "donné", "lettres" comme "requis" inconnu, assembleurs, enfin délimitants[3], associés à l'exécution des instructions.» [ibid., p. 137].

Si d'un côté la représentation de l' « inconnu » par un symbole non chiffré (une lettre) se fit nécessaire (justement parce qu'il était inconnu), celle du « donné » ne présentait, comme nous avons vu, aucun caractère général. Ce fut Viète qui le premier introduisit une représentation non chiffrée du « donné », se servant de lettres différentes de celles qu'il employait pour représenter l' « inconnu » : il proposait l'utilisation de voyelles majuscules pour les grandeurs requises (les moins nombreuses) et des consonnes majuscules pour les grandeurs données. Cette introduction symbolique tant pour le requis que pour le donné fut à l'origine, comme le note Serfati, de ce que le XVIIème siècle (à la suite de Leibniz) appela *canon* ou *formule*[4]:

> « L'invention de Viète revint alors dans les faits à introduire une symbolique par laquelle on pourrait continuer d'user des considérables avantages des preuves "en nombres" (mécanismes et automaticité du calcul, écriture de séquences complexes d'opérations), tout en conservant le caractère universel des énoncés et des solutions, particulièrement la considération du "donné" comme arbitraire, qui avait été le privilège véritable de la géométrie. » [ibid., p.138]

Si les successeurs de Viète retinrent son idée de représentation symbolique du donné et du requis dans les textes mathématiques, il n'en fut pas de même en ce qui concerne l'universalité d'interprétation des lettres. La *Géométrie* de Descartes en est le premier exemple, repris par la plupart les géomètres post-cartésiens :

> « La *Géométrie* de Descartes est ainsi le premier des grands textes mathématiques qui utilise à la fois pleinement le système de Viète de représentation du "donné", en même temps qu'il en annule toutes les prétentions à l'universalité. (…) Après Descartes, aucun géomètre conséquent ne voulut se priver de la faculté de pouvoir, à un moment donné du texte, rechercher, comme inconnues, des grandeurs jusqu'alors considérées comme fixées, dès lors qu'elles étaient arbitraires. En termes d'interprétation, cette faculté ouverte se traduisit comme échange des significations des "lettres", conduisant ainsi à des investigations neuves sur un même support symbolique. A l'intérieur d'un même texte pouvaient donc coexister des conventions d'interprétation contraires quant aux "lettres" : on comprend rétrospectivement mieux pourquoi n'aura été viable aucune

---

[3] Voir paragraphe III.1.4. Note de l'auteur.
[4] Le privilège du canon sur le rhétorique en algèbre fut en effet décisive sur le plan historique.

convention universelle, gouvernant tous les textes possibles. Toute "lettre" interprétée comme "donné" indéterminé, à un moment du texte, pourra ultérieurement être considérée comme "requis" inconnu, et recherché comme tel. » [ibid., p.155]

Contrairement à ce qu'il aurait pu sembler au premier abord, cette liberté d'interprétation contribua positivement à la lecture des textes symboliques[5] : depuis Viète et Descartes et jusqu'à aujourd'hui, faute de convention de distinction universelle, les textes mathématiques sont lus au travers de différentes « clés d'interprétation » (cf. Serfati) permettant ainsi une flexibilité d'interprétation tout en gardant la logique interne du texte symbolique. C'est ce que résume ainsi M. Serfati :

« (…) chaque texte symbolique sera usuellement l'objet de "clés" diverses, chacune présentant une bi-répartition entre les "lettres" et portant distribution corrélative de deux significations ; "donné" indéterminé et "requis" inconnu. Chaque "clé" véhicule ainsi un schéma de signification : quantification (quelques-tout) et procédure modale (existentielle-universelle). Le modèle le plus fréquent est celui où une seule "clé" gouverne tout le texte, ainsi interprété selon une même grille. Fréquemment aussi cependant, des "clés" diverses sont dans les faits successivement proposées par l'auteur – souvent implicitement – impliquant, entre deux "clés", des interprétations contraires des "lettres". Comme on a vu chez Descartes, semblable juxtaposition de "clés" trouve une source nécessaire dans la nature multiple des questions ainsi soulevées sur un même support symbolique, chaque schéma de signification permettant alors de poser et résoudre des questions inaccessibles autrement, c'est-à-dire selon le schéma d'une autre "clé". » [ibid., p. 157]

IV.1.3 - La représentation des instructions opératoires élémentaires

Plutôt que décrire chronologiquement l'apparition de tels signes, nous soulignerons dans ce paragraphe leurs principales caractéristiques en accordant davantage d'attention à leur nature épistémologique. Les signes (« figures », dirait M. Serfati) auxquels nous faisons ici allusion sont ceux utilisés pour représenter les quatre opérations élémentaires (l'addition, la soustraction, la division et la multiplication) ainsi que celui relatif à l'extraction de racines.

Si M. Serfati parle de « figures » c'est parce que les signes choisis pour représenter telles opérations se différencient de ceux désignant les inconnues, les nombres ou encore le « donné » dans un problème (cf. paragraphe précédent). Ce ne sont donc ni des « lettres » ni des « chiffres », ni même des signes cossiques – les trois seuls signes que nous avons analysés jusqu'à présent. Le souci de distinguer les différents « styles » de signes en y incluant des « figures » n'apparut que tardivement dans l'histoire des mathématiques :

« (…) les premiers signes historiques modernes pour l'addition et la différence (la "croix" et le "trait") apparurent-ils simultanément à la fin du XVIème siècle seulement. (…) A la fin du XVIIème siècle, le système de signes ayant vocation à codifier les "quatre opérations" et l'extraction de racines était stabilisé conformément à celui aujourd'hui en vigueur. »[6] [ibid., p.58]

[5] Et plus : dans cette nouvelle notation se trouva inscrite la nécessité même à l'avancement des mathématiques.
[6] Cajori (1928) décrit la complexe histoire concernant la mise en place des signes de soustraction et addition, qui furent très longtemps en étroite concurrence avec d'autres signes (Cajori parle de *struggle for supremacy*).

Quant au registre combinatoire des « figures » relatives aux opérations élémentaires par exemple, nous pouvons observer qu'elles créent deux « places » dans le texte : une avant le signe et l'autre après. Pour déchiffrer un texte symbolique[7], le lecteur doit ainsi, selon Serfati, procéder en trois étapes, en commençant par reconnaître la « figure », puis en interprétant sa signification pour ensuite interpréter les signes placés des deux côtés de la « figure ». Prenons un exemple : face à « 3 + 2 », le lecteur reconnaît d'abord la « croix », l'interprète comme un symbole traduisant une addition et interprète les « chiffres » comme étant des nombres. Il lit alors l'instruction[8]: « ajouter le nombre de signe 2 au nombre de signe 3 », et par abus de langage : « ajouter 2 à 3 ». On doit alors dire qu'une telle lecture ne se fait plus de gauche à droite, mais depuis le centre (emplacement de la « figure ») vers les côtés, ce qui contredit toute lecture selon le fil du texte. Sur le plan combinatoire nous parlerons donc d'assembleurs (terme emprunté de Bourbaki) plutôt que de « figures ». Observons également que si les assembleurs désignant les opérations élémentaires créent deux « places » sur la ligne de l'écriture, celui de l'extraction de racines n'en crée qu'une (de même que le « ∂ » Leibnizien), la (les) « place(s) » crée(s) pouvant cependant être remplie(s) par le même type de forme : une « lettre » ou un « chiffre » (ou encore un assemblage de « lettres » et « chiffres »[9]).

Arrêtons-nous un moment sur le statut de l'interprétation du texte. Nous avons à ce propos évoqué dans le paragraphe précédant le fait que le lecteur lit « 3+2 » comme une « instruction », ce qui relève en quelque sorte l'idée d'action, de *procédure*. Cette interprétation n'est pas la seule possible : un assemblage pourrait également être interprété en tant que *résultat*. Tandis que le *résultat* de 3+2 ou de 10/2 est le même, la *procédure* est différente ; et il n'y a pas de raison pour que l'on privilégie une interprétation plutôt que l'autre (en fait, c'est l'usage de cette écriture dans le problème qui tranchera le débat). Il est toutefois important d'observer que l'exemple que nous avons évoqué ne relève que du registre numérique et que son résultat peut ainsi être rendu explicite. Un texte symbolique où figure un signe d'inconnue ne permet cette explicitation qu'à partir du moment où une valeur est attribuée à celle-ci. L'assemblage x - 7, par exemple, comme le note Serfati, comporte « organiquement une effectuation suspendue, son interprétation devant être ainsi précisée : "en supposant connue la valeur attribuée à x, retranchez le nombre 7 de cette valeur". » [ibid., p.61]. Si la confusion entre les deux interprétations perdura, notons-le, jusqu'à la fin du XIXème siècle, « il convient néanmoins » selon Serfati,

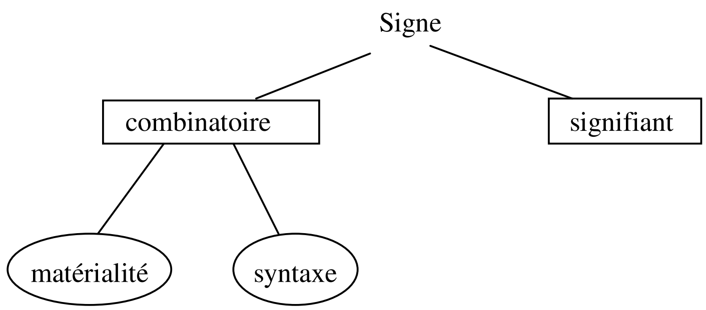
> « de considérer aujourd'hui que, dans tous les cas, la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires est bien (…) d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non la valeur du résultat, cette convention à l'usage du lecteur étant de surcroît conforme aux intentions initiales de l'auteur. Dans ces conditions cependant, cette règle n'assure pas la représentation, elle aussi évidemment indispensable du résultat ! » [ibid., p.61]

7 C'est-à-dire reconnaître sa structure combinatoire.
8 Nous reviendrons par la suite sur le choix de ce terme.
9 Nous ne traiterons pas ici des instructions composées (traitées par la suite), nous limitant donc à des exemples très simples.

Nous reviendrons à la question de l'interprétation d'assemblages en termes de procédure ou résultat dans la section suivante, où interviendront des assemblages plus complexes.

Avant d'amorcer la description de la quatrième figure de la représentation, faisons le point sur les éléments que nous possédons jusqu'à présent pour analyser un signe sous une perspective épistémologique.

Deux concepts sont présents dans un signe : le combinatoire et le signifiant ; le combinatoire étant, quant à lui, composé de deux éléments : la matérialité et la syntaxe.



La matérialité d'un signe est, comme le nom l'indique, en rapport avec l'aspect physique du signe ; ce peut être le « graphique » qui le définit ou encore « l'appartenance à une certaines sous-catégories du magasin général : lettres de divers alphabets (…) » [ibid., p.65]. Ainsi, par exemple, la « croix » « + » caractérise la matérialité d'un signe qui possède deux symétries.

La syntaxe combinatoire d'un signe est définie par M. Serfati comme étant « l'ensemble des règles qu'il est assujetti à vérifier dans le cours de l'écriture symbolique : nombre de places ouvertes par exemple, niveau hiérarchique local (cf. paragraphe suivant)[10] , légitimité de sa juxtaposition avec d'autres signes. » [ibid., p.65]

D'un autre côté, en dehors du plan combinatoire du signe, il y a aussi le plan signifiant, c'est-à-dire la signification que le signe apporte dans un contexte donné. Ainsi, comme la « croix » représente usuellement une addition, le « point » représente une multiplication, etc.

IV.1.4 - La représentation de l'enchevêtrement des instructions

Nous nous sommes, jusqu'à présent, restreints à des exemples d'assemblages « simples » (que M. Serfati dénomme de niveau 1 ou 2 [11]), c'est-à-dire où il ne figure, dans la plupart des cas, qu'une instruction élémentaire. Or une fois que le système symbolique mis en place par Viète (et repris par Descartes) fut assimilé par les géomètres, les questions de représentation symbolique de problèmes jusqu'alors posés sous forme rhétorique se multiplièrent, notamment ceux où une succession d'instructions intervient. Prenons un exemple[12] : « Effectuer une multiplication, dont l'un des termes

[10] Note de l'auteur.
[11] Nous reviendrons à ce classement dans la suite du paragraphe.
[12] Exemple présenté par M. Serfati [Serfati, 1998, p.71].

est le nombre de signe 3,5 et l'autre le résultat de cette instruction élémentaire : ajouter au nombre de signe 2 le nombre inconnu de signe *x* ». L'instruction donnée s'organise en deux instructions élémentaires, on dira donc qu'elle est du second niveau. Si sa description dans le langage rhétorique est sans ambiguïté, sa représentation symbolique à partir des signes jusqu'alors disponibles (c'est-à-dire « + », « 3,5 », « 2 », « *x* » et « . ») revêt des difficultés que les géomètres ont dû, nous le verrons, surmonter.

En effet, la tendance première est de traduire symboliquement l'instruction composée citée ci-dessus comme suit : $3{,}5\ .\ 2 + x$. Ce faisant, le géomètre suit linéairement les instructions données et respecte les règles symboliques : pour représenter la multiplication, les deux places ouvertes par le « point » sont remplies d'un côté par le signe 3,5 et de l'autre par l'assemblage de niveau 1 : « $2 + x$ ». Le respect des règles n'est cependant pas suffisant pour que la lecture du texte symbolique soit à la fois conforme aux instructions rhétoriques données et non ambiguë. En effet, face à tel assemblage de signes, un lecteur peut interpréter le texte de deux façons différentes, selon qu'il accorde la primauté à la multiplication ou à l'addition. Dans le premier cas, il effectuera la multiplication du nombre de signe 3,5 par le nombre de signe 2 lequel résultat sera additionné au nombre de signe *x*, tandis que dans le deuxième cas, le lecteur additionnera le nombre de signe *x* au nombre de signe 2 et multipliera le résultat de cette somme au nombre de signe 3,5. Deux interprétations qui ne coïncident évidemment pas.

Afin de lever telle ambiguïté, les géomètres mirent en place, dès les débuts de l'écriture symbolique, des signes auxiliaires délimitant dans la "ligne" « l'ensemble de tous les signes associés à un même assembleur » [ibid., p.73]. Les principaux signes employés furent le *vinculum* (le « lien » présent dans les écrits de Bombelli ; par exemple dans *Algebra* où il écrit : $\underline{2\ \mathrm{p}\ x}\ .\ 3{,}5$ ou encore dans les écrits de Leibniz : $\overline{2 + x}\ .\ 3{,}5$) les points séparateurs (employés par Descartes dans *Excerpta Mathematica* : $.\ 2 + x\ .\ .\ 3{,}5$) et finalement les parenthèses rondes introduites vers le XVIème siècle et en vigueur jusqu'à aujourd'hui. Comme le précise M. Serfati, « les signes auxiliaires auront donc eu simplement pour fonction première de délimiter le territoire[13] de chaque assembleur, en en marquant les bornes » [ibid., p.73]. De tels signes (parenthèses ou *vinculum*) seront désormais dénommés *délimitants*. Ainsi, dans l'exemple évoqué plus haut, on pourra envisager l'assemblage de niveau deux « $((2+x).3{,}5)$ » obtenu en adjoignant tous les délimitants légitimes, comme étant dûment complété[14], mettant ainsi en évidence dans l'écriture les territoires de chaque signe. Autrement dit, $((2+x).3{,}5)$ est ce que M. Serfati dénomme la « forme » associée de l'assemblage $(2+x).3{,}5$[15].

---

[13] C'est-à-dire les positions qu'occupent l'assembleur et les signes placés de part et d'autre de celui-ci.

[14] C'est une opération théorique qui peut toujours être effectuée mais qui, dans la pratique, n'est pas toujours appliquée.

[15] Nous pouvons désormais reprendre la définition de niveau d'un assembleur fournie par M. Serfati: « les premiers [assembleurs d'une Forme *a priori* syntaxiquement correcte] à être considérés sont ceux de premier niveau, c'est-à-dire ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant et sans qu'il existe d'autres assembleurs avec cette propriété. L'assemblage et la Forme associée sont alors dits de premier niveau. Les assembleurs de second niveau sont ensuite ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant, et tels

En même temps que l'introduction de signes délimitants supprima l'ambiguïté de la lecture d'un texte symbolique (en agissant ainsi sur le plan formel de l'écriture), elle créa un ordre partiel à son déchiffrement :

> « (…) l'ordre trouvé pour les assembleurs fixe en effet l'ordre d'exécution des instructions dont ces mêmes assembleurs sont les représentants symboliques. Reprenant l'exemple initial, on interprètera ainsi : "Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe x. Multiplier ensuite le résultat obtenu par le signe 3,5". » [ibid., p.74]

Cet ordre, propre au déchiffrement (et donc employé par le lecteur) peut être considéré théoriquement comme l'inverse de celui qu'applique l'auteur du texte. Celui-ci a en effet d'abord voulu représenter la multiplication (opération conceptuellement considérée comme première), tandis que le lecteur a dû, au contraire, d'abord reconnaître les termes de la multiplication et donc commencer par l'instruction d'addition. Nous observons qu'il y a donc deux sens possibles à l'ordination du texte symbolique: une ordination décroissante (position dite de l'auteur, propre à une démarche analytique de décomposition, en commençant par les « formes » de plus bas niveaux) et une ordination croissante (position dite de lecteur, du déchiffrement, relative à une démarche synthétique de reconstruction, partant des instructions intérieures pour aller vers les plus signifiantes).

Pour conclure cette section dédiée aux signes délimitants, analysons de plus près la lecture de la « forme » associée à un assemblage. L'exemple que nous avons pris se veut éclairant à ce propos : tandis que l'assemblage de niveau un « $2+x$ » relève d'une procédure (cf. la section précédente), sa forme associée « $(2+x)$ » dans l'instruction « $((2+x).3,5)$ » revêt un caractère de résultat. D'ailleurs, si nous reprenons l'interprétation rhétorique de cette écriture (« Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe *x*. Multiplier ensuite le résultat obtenu par le signe 3,5 »), ce double volet procédure/résultat d'un assemblage apparaît de façon plus flagrante. En reprenant les termes employés par M. Serfati, $(2+x)$ est en fait *la représentation symbolique même du résultat*. Il généralise :

> « Ainsi, un assemblage sera interprété comme une procédure et la "forme" associée comme son résultat. (…) Ainsi donc, ces signes auxiliaires dont la fonction première, sur le plan purement formel, avait été de prescrire, par le moyen de la délimitation, un ordre de succession qui avait fait défaut dans l'écriture symbolique spontanée, se trouvèrent investis en retour, dans le registre signifiant, d'une fonction d'agrégation (des termes) et d'objectivation (des résultats).» [ibid., p. 79]

Il est important d'observer que ce mouvement (c'est-à-dire cette action théorique qui consiste à compléter dûment tout assemblage jusqu'à l'obtention de sa « forme » associée) a été contredit et masqué dans la pratique, dans un souci d'économie générale de la gestion de la représentation, par un mouvement inverse : l'élision. Nous reviendrons par la suite, sous une perspective didactique, à la discussion de la difficulté de maintenir en classe l'équilibre entre ces deux mouvements.

qu'entre eux, il n'existe que des assemblages de premier niveau[12]. Ainsi définit-on assemblages et Formes de second niveau Et ita porro... » [Serfati, 1997, p. 179-80] [12. Ou des Lettres-Chiffres ; il faudra néanmoins qu'au moins un assemblage de premier niveau soit effectivement présent. Note dans l'original]

IV.1.5 - La représentation de la mise à égalité

Parmi les problèmes que se posaient les géomètres et ce, depuis les grecs, n'étaient pas rares ceux où intervenait la mise à égalité de deux résultats de calcul. Avant même que l'usage des symboles mathématiques ne fut universellement admis, les textes mathématiques presque entièrement rhétoriques se trouvaient parsemés de « faciunt », « font », « fara », « aequales », etc. Mais cette désignation n'était pas réservée aux textes rhétoriques : les textes partiellement symboliques désignaient eux aussi la mise à égalité sous cette forme ; la désignation rhétorique perdura en effet bien longtemps[16], jusqu'au XVIème siècle quand apparut, en 1557 *The Wetstone of Witte* de Robert Recorde. Recorde fut le premier à représenter la mise à égalité par une « figure » qui, tout comme les signes représentant les opérations élémentaires, se voulait éloignée des « chiffres », « lettres » ou signes cossiques (bien que Recorde eut été un adepte du système cossique) : il choisit de la représenter par deux traits parallèles à la ligne d'écriture, plus longs que ceux employés dans le signe d'égalité en vigueur aujourd'hui. Ce choix était d'ailleurs, d'après lui, bien fondé : « rien n'est plus semblable que deux traits parallèles à la ligne d'écriture ».

Le signe de Recorde fut accepté et repris par la suite ; il sera notamment présent dans la première moitié du XVIIème siècle dans les ouvrages de Thomas Harriot, Oughtred et Richard Norwood. Notons tout simplement que Descartes se servit d'un symbole ayant la même syntaxe pour représenter la mise à égalité dans la *Géométrie* : la « boucle » (∝), un choix dont l'origine reste encore mystérieuse sur le plan historique.

Après avoir brièvement décrit l'apparition et la mise en place de ce signe dans les textes mathématiques, analysons plutôt, comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, les caractéristiques de nature épistémologique d'un tel signe et plus précisément le mode de déchiffrage d'un texte mathématique où celui-ci intervient.

Sur le plan combinatoire et plus précisément en ce qui concerne sa matérialité, le signe de Recorde, nous avons vu, se veut proche des signes des opérations élémentaires : il est lui aussi une « figure », puisée en dehors du magasin général des signes préexistants. Et sa fonction combinatoire pourrait également sembler être, à première vue, la même que celle des quatre opérations : créer deux places que viennent occuper à l'amont et à l'aval, des « formes » de divers niveaux. En d'autres mots, en présence du signe d'égalité, le lecteur doit impérativement reconnaître cette figure en premier en créant ainsi deux places ouvertes de part et d'autre du signe. Cependant, sur le plan combinatoire même, et contrairement aux signes opératoires, « un seul "deux-traits" suffisait à organiser une unité syntaxique autonome » (ou achevée, au sens de l'achèvement combinatoire) [Serfati, 1998, p. 279]. De cette façon, le pouvoir séparateur du signe d'égalité[17] transcende celui de tous les autres signes opératoires et la lecture d'un texte mathématique où il figure peut se décrire comme suit :

[16] La persistance du rhétorique en ce qui concerne la mise à égalité fut notable, comparée à l'histoire des autres signes.
[17] Les signes relationnels en général.

« un texte mathématique usuel, ancien ou moderne, est en fait déchiffré à partir de chaque signe d'égalité (ou de ses "tenants lieu"), des séparations qu'il instaure, des deux blocs ainsi constitués, et des hiérarchies à l'intérieur de chaque bloc, elles-mêmes reconnues à partir des assembleurs de plus bas niveau. » [ibid., p. 279]

IV.1.6 - <u>La représentation des concepts composés</u>

Nous aborderons dans cette section les principales caractéristiques symboliques des concepts composés au travers de l'analyse de la création de l'exponentielle puisque celle-ci non seulement s'est avérée « essentielle sur le plan de la technique mathématique » mais surtout parce qu'elle fut l'origine, historiquement parlant, « de la représentation dans l'écriture symbolique d'un concept composé » [Serfati, 1998, p.248].

De même que la recherche d'un élément numérique inconnu a toujours été une question fort présente dans les textes mathématiques, concevoir celle-ci réitérée ou encore rechercher la valeur de son « cube » (ou d'autres « puissances ») se fit également très tôt. Mais si cette nécessité parut naturelle à la plupart des géomètres, le choix des signes destinés à sa représentation ne fut pas unanime : l'écriture symbolique - et la procédure même de représentation - des « puissances » de l' « inconnu » fut en effet bien diverse. Dans les écrits de Diophante, par exemple, qui représentait, nous l'avons vu, l' « inconnu » par le symbole ζ (zéta), nous retrouvons les signes Δ^{γ} pour le « carré », K^{γ} pour le cube, $\Delta^{\gamma}\,\Delta$ pour le « bicarré », $\Delta\ K^{\gamma}$ pour le « carré-cube », etc. Dans le système cossique, pour lequel l' « inconnu » était représenté par le symbole ꝛ, et plus précisément dans les écrits de Stiefel et Rudolff par exemple, le « carré » de la chose était représenté par 𝔷 (le *census*), le « cube » par ꞓ et le « carré-carré » par 𝔷𝔷, dressant ainsi un véritable inventaire de signes.

Bien d'autres signes pour les concepts nouvellement composés furent répertoriés, mais ceux que nous venons de décrire suffisent pour analyser la procédure de représentation dont il est objet dans cette section. En effet, nous pouvons remarquer que ni Diophante ni les auteurs de l'école cossique ne « laissaient des traces » de la « chose » lorsqu'ils considéraient son « carré » ou son « cube », ces trois représentations étant complètement indépendantes les unes des autres. Dès lors, Stiefel étant incapable de représenter le « carré » de 1 𝔷 + 1 ꝛ + 2, était donc amené à le développer : (1 𝔷+ 1 ꝛ + 2)(1 𝔷 +1 ꝛ + 2) avant d'aboutir au résultat : 1𝔷 𝔷+ 2 ꞓ + 5 𝔷+ 4ꝛ + 4. Puisque deux signes ne présentaient aucune similitude, un simple examen visuel était insuffisant pour déduire par exemple qu'il existait pour le carré une « grandeur-mère » (cf. Serfati) symbolisée par ꝛ; il fut donc nécessaire de produire une batterie de règles déterminant le résultat de la multiplication entre différentes espèces telle la comptine qui perdura jusqu'au XVIème siècle : « *res in rem fit census* »[18].

Même si Descartes, dans ses écrits de jeunesse tels les *Cogitationes Privatae* s'était servi des signes cossiques pour l'inconnue ainsi que pour le « carré » ou le « cube », il fut le premier à

[18] « De la chose par de la chose fait du carré ».

concevoir le caractère composé[19] de la puissance qui jusqu'alors faisait défaut dans les autres textes mathématiques. En instaurant la notation toujours en vigueur où le chiffre dans l'exposant vint remplacer le cossique, il pouvait désormais regarder la « chose » comme une grandeur indéterminée et la relation comme nombre entier. Comme le note M. Serfati :

> « Se substituèrent en effet aux comptines des formules additives simples sur les nombres entiers déployées à longueur de pages dans la *Géométrie*. Ainsi, la seule considération de la formule : $x^1.x^1 = x^2$ dispensa désormais du " Res in rem... ". D'un autre côté, le système cartésien permit aussi la désignation d'une seconde inconnue, supprimant ainsi l'autre inconvénient cossique majeur. En effet, en substituant $x \longrightarrow y$ dans x^2, on obtient évidemment y^2. Le nombre d'inconnues ainsi susceptibles d'être désignées sera donc seulement limité par celui des lettres de l'alphabet, un avantage à porter au compte de l'analyse de la substance en termes d' « indéterminé », directement inspirée de l'œuvre de Viète. » [ibid., pp.262-163]

IV.2 - Une lecture épistémologique de quelques travaux didactiques

Nous nous proposons dans cette section d'analyser quelques travaux didactiques à la lumière des travaux épistémologiques, nous servant plus précisément du découpage des figures de la représentation proposé par M. Serfati décrit dans le paragraphe précédent pour guider notre travail. Pour mener cette analyse, à chaque figure de la représentation, nous avons cherché associer des travaux didactiques qui lui semblaient relatifs.

L'association des travaux didactiques aux différentes figures de la représentation ne pourra cependant pas se faire de façon exhaustive. Nous faisons en effet face à une multiplicité et une diversité cohérentes de conclusions dégagées d'écrits didactiques relevant d'un même domaine de recherche, c'est le cas de l'analyse du signe d'égalité, pris en compte par la didactique des mathématiques sous différents prismes. Nous sommes conscients de telle diversité et pour cette raison ne prétendons pas procéder à une lecture épistémologique de toutes les conclusions issues des recherches didactiques relatives à un domaine donné. Par ailleurs, nous nous limiterons aux cinq premières figures présentées dans la section précédente. Si notre double analyse (épistémologique et didactique) ne se prétend pas exhaustive, son importance doit être perçue en ce sens qu'elle apporte un nouveau regard à quelques études déjà menées et qu'elle est susceptible de soulever de nouvelles questions, éventuels moteurs pour de futures recherches.

IV.2.1 - La représentation des instructions opératoires élémentaires : le cas de l'addition

La conception qu'ont les élèves des signes ayant vocation à codifier les « quatre opérations » et l'extraction de racines a été l'objet de diverses recherches en didactique des Mathématiques. Stacey et MacGregor (1994) exploitent notamment la façon dont les élèves représentent et interprètent les sommes et produits algébriques et vérifient l'adéquation d'hypothèses qui pourraient justifier les

[19] Et dès lors qu'il y avait deux prédicats, un troisième était créé : la relation entre les deux.

erreurs commises par les élèves. L'erreur la plus fréquemment produite par les élèves qui retient l'attention des deux auteurs est celle qui consiste à concaténer des termes lorsqu'il s'agit d'une addition ; autrement dit, utiliser l'expression du type *ab* quand $a+b$ est attendu[20]. Nous n'allons pas rendre nôtre leur objet d'étude –à savoir l'usage de « conjoined expressions » (cf. K. Stacey & M. MacGregor) dans les productions d'élèves- mais allons plutôt exploiter quelques résultats issus de leurs recherches qui semblent être en rapport avec le discours soutenu dans les paragraphes précédents. C'est en particulier une production d'élève qui servira de point de départ pour l'analyse épistémologique des travaux didactiques que nous traiterons dans cette section.

Entre 1991 et 1993, Stacey et MacGregor firent passer un questionnaire auprès d'élèves du secondaire dans 24 établissements scolaires australiens. Une des questions posées consistait à *écrire à l'aide de symboles mathématiques :*

(i) *Ajoute douze à x*

(ii) *Multiplie x par trois*[21].

A cette question, la majorité des élèves répondit « x+12= » dans la partie (i) et « 3 x x = » ou encore « x x 3 = » dans la partie (ii). Stacey et MacGregor interprètent ces deux réponses comme suit : « The use of "equal" sign suggests that students regard the expressions as incomplete and needing to be evaluated »[22] [K. Stacey & M. MacGregor, 1994, p. 292].

En effet, les élèves (ici auteurs des expressions) semblent ne pas accepter par exemple l'assemblage « x+12 » comme étant une réponse suffisamment valide, ne pouvant pas considérer l'expression comme un objet en soi. En termes didactiques on dira alors, en empruntant la terminologie de Sfard, que ces élèves se situent à un niveau opérationnel (cf. chapitre I). L'inclusion du signe d'égalité dans l'expression semble indiquer une envie de la part des élèves de produire un résultat, dévoilant par là même le caractère procédural de l'addition auquel les élèves sont rattachés. Ceci rejoint d'ailleurs le rôle principal des symboles relatifs aux opérations élémentaires que nous avons évoqué dans la section précédente (cf. paragraphe IV.1.3) :

> « (...) la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires est bien (...) d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non la valeur du résultat, cette convention à l'usage du lecteur étant de surcroît conforme aux intentions initiales de l'auteur. » [Serfati, 1997, p.61]

Revenons un instant sur l'idée de procédure que nous avons évoquée plus haut. Nous devons souligner que nos hypothèses reposent sur des assemblages bien précis : ceux où une inconnue intervient. Notons simplement que le fait de considérer l'addition sous le prisme procédural peut être

[20] Ceci correspond par exemple à répondre « *8ab* » à la question : « simplifier $2a+5b+a$ ». Ce type d'erreur, résistant dans les productions d'élèves, a fait objet de maintes recherches en didactique des Mathématiques, étant notamment pris en compte dans les travaux de Tall pour définir le *parsing obstacle*, dans les travaux de Chalouh & Herscovics (1998) où ils analysent la *closure misconception* de quelques élèves, ou encore dans les écrits de Kuchemann (1981) et Booth (1984).

[21] La question fut originellement posée en anglais : « Write in mathematical symbols : (i) Add twelve to x. (ii) Multiply x by three ».

[22] Nous reviendrons ultérieurement sur les différentes interprétations des élèves en ce qui concerne le signe d'égalité.

entre autres dû à la présence du signe de l'inconnue[23]. Sfard note par ailleurs qu'il est facile de bien distinguer les deux volets (procédural et structural) tant qu'on se situe dans un contexte arithmétique, mais que cela devient plus délicat une fois que le problème se pose en algèbre:

> « In arithmetic it is easy to keep these two meanings [computational procedures and objects produced] separate by putting them in different expressions : 2+3 denotes the operation, 5 is the outcome. No such separation is possible in algebra[24], in an expression like a+b or 3(x+5)+1. Here, the process cannot be actually formed; no added values result from the operation[25]. The formula, with its operational aspect salient (it contains "prompts" for action[26] in the form of operators), must be also interpreted as the product of the process it represents. » [Sfard,1994 , p.199]

Quoi qu'il en soit, ces élèves ne considèrent pas le résultat de l'addition (ou la multiplication) proposée en tant qu'objet, octroyant ainsi la primauté au volet opérationnel de l'interprétation de l'écriture.

Le double aspect (procédure/objet) des écritures additives a également été repéré par Tall (1994). Du fait même que l'addition peut être interprétée, selon Tall, tantôt comme procédure tantôt comme objet (« 3+2 *makes* 5 but also 3+2 *is* 5 » [D. Tall, 1994, p.16]), il la qualifie en tant que **procept** (« it represents the amalgam of process and concept with a symbol operating dually for either » [ibid., p.16]). C'est également le cas de la notion d'un nombre, dont le symbole représente à la fois un processus (le dénombrement) et un concept (le nombre). Cette définition de procept qui résume une ambiguïté permet à Tall de traiter les expressions telles celles que nous avons évoquées plus haut (« 3+2 » et « 3(x+5)+1 ») à deux niveaux différents : il appelle « **procept opérationnel »** (tel « 3+2 ») le procept dans lequel est ancré un processus de calcul permettant de produire le résultat et « **template[27] procept** » (tel « 3(x+5)+1 ») celui dont le processus ne peut être effectué à moins que des valeurs ne soient attribuées aux inconnues (le symbole pouvant toutefois être manipulé). Ainsi, les deux expressions évoquées ne révèlent pas du même processus ni du même concept : 3+2 recouvre le processus d'addition et le concept de somme tandis que 3(x+5)+1 recouvre le processus d'évaluation et le concept d'expression.

Pour les élèves dont il est question dans l'étude de Stacey et MacGregor, l'addition ne semble pas revêtir la caractéristique de *procept* introduite par Tall (c'est-à-dire le fait de pouvoir être aussi bien interprétée en tant que procédure qu'en tant qu'objet) : de par leurs réponses, nous avons vu que la majorité privilégie le volet opérationnel de l'addition. Ce faisant, les élèves semblent être cohérents avec l'interprétation épistémologique du signe de l'addition ; nous citerons à nouveau l'observation de Serfati à ce sujet : « (…) la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires est bien (…) d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non la valeur du résultat .» [Serfati,

---

[23] Souvenons-nous de l'exemple extrait de l'*Algebra* (1608) de Clavius posé au moyen de signes cossiques d'inconnues : 1 ℞ -7, qui s'interprétait ainsi : « De la valeur de l'inconnue, retranchez le nombre 7 » [Serfati, 1997, p. 57], mettant le volet procédural de la soustraction en évidence.

[24] Nous discuterons cette affirmation dans le paragraphe suivant.

[25] M. Serfati parle d'ailleurs, souvenons-nous, d' «effectuation suspendue » [M. Serfati, 1997, p.61].

[26] C'est-à-dire des incitations à agir. Observons que le terme « prompt », dans le monde du théâtre, désigne le souffleur.

1997, p.61]. La codification de la valeur du résultat d'un assemblage fera l'objet d'une discussion menée dans le paragraphe suivant, étayée par l'analyse de travaux didactiques.

IV.2.2 - La représentation de l'enchevêtrement des instructions

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la majorité des élèves concernés par l'étude de Stacey et MacGregor perçoivent l'écriture additive en termes de procédure plutôt qu'en tant qu'objet, privilégiant ainsi le caractère « épistémologique » de cette opération dont le rôle premier est celui de représenter une règle pour l'exécution d'une action (d'une opération).

Nous avons également noté, de part la présence de l'inconnue dans l'expression, qu'aucun résultat numérique ne pouvait être obtenu (les élèves écrivent d'ailleurs « x+12= »), ce qui aurait pu amener les élèves à privilégier l'interprétation de l'addition sous un angle procédural. Sfard observe à ce propos que du fait que le résultat ne peut être immédiatement effectué (c'est à dire, en employant ses termes, qu'aucun objet ne peut être créé), il est plus difficile de percevoir la dichotomie processus/objet en algèbre (qui sous-entend un travail avec des expressions où figurent notamment des lettres) qu'en arithmétique.

Reprenons le passage cité dans le paragraphe précédent :

> « In arithmetic it is easy to keep these two meanings [computational procedures and objects produced] separate by putting them in different expressions : 2+3 denotes the operation, 5 is the outcome. No such separation is possible in algebra, in an expression like $a+b$ or $3(x+5)+1$. Here, the process cannot be actually formed; no added values result from the operation. » [Sfard, 1994, p.199].

Il est clair, d'après son discours, que non seulement cette distinction processus/objet se fait plus difficilement en algèbre qu'en arithmétique, mais que les expressions algébriques, selon Sfard, ne permettent pas de distinguer l'opération de son résultat. Or de l'analyse épistémologique de la représentation de l'enchevêtrement des instructions se dégage une conclusion différente. S'il est vrai que les signes utilisés pour indiquer la délimitation des expressions (dénommés signes *délimitants,* tels le « vinculum » leibnizien, les deux points cartésiens ou encore les parenthèses rondes) furent créés afin de lever l'ambiguïté du déchiffrement de l'écriture codifiée (cf. paragraphe IV.1.4), leur emploi conduit (tacitement) à l'attribution d'une double fonction de ces signes dans le registre signifiant : la fonction d'agrégation (les instructions élémentaires possédant, de part la présence de signes délimitants, un ordre précis à leur exécution) et la fonction d'objectivation des résultats. C'est par rapport à cette seconde fonction que nous discuterons l'affirmation de Sfard.

Considérons le cas de l'assemblage : $((3{,}5.x)\text{-}(2+y))$. Une interprétation possible de cette écriture est : « ajouter l'entier de signe 2 au nombre de signe y. Multiplier le nombre de signe 3,5 par le nombre de signe x. Soustraire le premier des deux résultats du second »[28]. Ce qui est rhétoriquement énoncé en tant que « premier résultat » et « second » est représenté symboliquement par $(2+y)$ et

[27] C'est-à-dire un gabarit.
[28] Exemple cité dans [Serfati, 1997].

(3,5.*x*), respectivement. En d'autres mots, les délimitants présents dans l'écriture symbolique servent non seulement à relever l'ambiguïté du déchiffrement, mais servent aussi à indiquer les résultats partiels. Ainsi, un assemblage tel « 2+*y* », une fois « dûment complété » (cf. paragraphe IV.1.4) par des parenthèses pourra, selon Serfati,

> «(...) être interprété comme l'indication de la constitution du résultat de la procédure, que l'exécution puisse ou non être effective. Dans ces conditions, l'interprétation rhétorique achevée de (2+y) pourrait être : "Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe y, et constituer le résultat". Lorsque l'effectuation ne peut être explicite, cas usuel où l'assemblage contient au moins une "lettre" (signe d'inconnue), la constitution du résultat consiste dans les faits à disposer de celui-ci comme s'il était virtuellement exécuté, en un bloc constitué, qui pourra lui-même être l'objet de procédures ultérieures. Dans ces conditions où le résultat est ainsi constitué dans tous les cas, nous considérons en définitive que (2+y) est en fait la *représentation symbolique même du résultat*.»[Serfati, 1997, p.79. Italiques dans l'original].

Plus précisément, (2+*y*) est la représentation symbolique de la valeur du résultat[29].

Ainsi, même si aucune « valeur supplémentaire » (Sfard emploie les termes: *added values*) ne peut être issue du processus « 2+*y* » (dans le sens où en arithmétique le processus 5+2 est à l'origine du nombre de signe 7), on peut considérer qu'il est possible, en algèbre, de distinguer processus et résultat d'une expression, ceci grâce aux signes délimitants.

Le même mouvement dialectique rencontré en histoire se traduisant par la complétude d'un assemblage à travers l'inclusion des signes délimitants et l'élision de ceux-ci (cf. paragraphe IV.1.4) est également présent dans la classe. On y retrouve en effet un problème de gestion entre l'efficacité et la rigueur, d'autant plus que le niveau des élèves est rarement homogène : si quelques uns estiment indispensable de travailler avec les « formes associées » de tout assemblage, d'autres trouvent cette action superflue et cherchent à se débarrasser au plus vite des signes délimitants.

Nous avons analysé dans ce paragraphe l'application de signes délimitants à un assemblage où figurent les signes d'inconnues *x* et *y*. Or cette opération (théoriquement possible mais rarement effectuée dans la pratique) qui consiste à « compléter » un assemblage jusqu'à l'obtention de la « forme » qui lui est associée (cf. section précédente, paragraphe IV.1.4) ne se limite pas aux expressions algébriques où interviennent des signes d'inconnues. La même distinction procédure/résultat peut également avoir lieu lorsque l'on a affaire à un assemblage où interviennent des signes représentant des variables. La différence se situe alors au niveau de l'interprétation : l'interprétation de l'assemblage « *a*+3 » correspond à la procédure opératoire : « ajouter le nombre de signe 3 à la valeur indéterminée de signe *a* » et l'interprétation de la forme « (*a*+3) » est relative à la valeur du résultat. Les assemblages plus élémentaires suivent pareille distinction : l'interprétation de l'assemblage de niveau zéro « *a* » est également une procédure ; elle se résume cependant, dans le registre de l'indéterminé, à la désignation : « soit *a* le signe d'une grandeur arbitraire mais fixée ». La

[29] Un résultat (notamment représenté à l'aide de parenthèses) doit être analysé, d'après Serfati, selon sa nature et sa valeur. Ainsi, relativement à la forme « (2 + 3,17) », la nature du résultat est un nombre, tandis que sa valeur est le nombre de signe 5,17.

procédure correspond alors ici à la dénomination. Quant à l'interprétation de la forme « (a) », nous pouvons dire qu'elle correspond à la valeur d'un certain nombre.

Nous nous intéresserons davantage dans le paragraphe suivant sur l'interprétation de l'assemblage « a » et plus précisément sur les difficultés que les élèvent éprouvent à interpréter un tel assemblage. A l'instar des paragraphes précédents, c'est sous une perspective épistémologique que cette analyse, basée sur des travaux didactiques, prendra forme.

IV.2.3 - La représentation du donné

C'est en 1696, avec le traité de l'Hôpital, que le terme de variable fit sa première apparition sous une définition plutôt vague et ambiguë : « On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que toutes les autres changent ».[30] D'autres « définitions », au long des années, se succédèrent à celle proposée par l'Hôpital, sans toutefois s'avérer plus satisfaisantes sur le plan épistémologique. C'est au XXème siècle que mathématiciens, logiciens et philosophes se penchèrent sur la question tentant de résoudre « l'énigme de la variable »[31]. L'opposition entre Frege et Russel illustre notamment à quel point ce terme fut difficile à cerner. De cette opposition, nous fournissons ci-dessous un exemple illustratif : un extrait du texte de Frege en réponse à M. E. Czuber.

> « Il n'y a donc pas de nombre variable ; l'absence de nom propre pour d'éventuels nombres variables le confirme. Et ce fut un échec que de vouloir désigner un nombre variable par l'expression « le nombre qui exprime en millimètres la longueur du bâton ». Mais ne désigne-t-on pas des nombres variables par "x", "y", "z" ? C'est une manière de parler en usage ; ces lettres, toutefois, ne sont pas des noms propres de nombres variables comme "2" et "3" sont des noms propres de nombres constants. Les nombres 2 et 3 se distinguent de manière effective et assignable ; mais comment distinguer les variables prétendument désignées par "x" et par "y" ? On ne saurait le dire. On ne peut pas donner les propriétés que possède x et les propriétés différentes que possède y. A supposer qu'on associe jamais quelque chose à ces lettres, ce sera la même représentation confuse pour les deux. S'il semble y avoir quelques différences apparentes, c'est que l'on pense à telle ou telle application ; mais nous n'en parlons pas ici. Puisque l'on ne peut pas saisir chaque variable en sa particularité, il est impossible d'attribuer des noms propres aux variables.
>
> M.E.Czuber a tenté de remédier à quelques unes des difficultés que nous venons d'évoquer. Pour se libérer du temps, il interprète la variable comme un nombre indéterminé. Y aurait-il des nombres indéterminés ? Faut-il partager les nombres en déterminés et indéterminés ? Tout objet ne doit-il pas être déterminé ? Mais d'autre part, le nombre n n'est-il pas indéterminé ? Je ne connais pas le nombre n, "n" n'est le nom propre d'aucun nombre, ni déterminé ni indéterminé. On dit cependant parfois "le nombre n". Une telle expression doit être examinée dans son contexte. Prenons un exemple : "Si le nombre n est entier, $cosn\pi=1$."[32] Seule la proposition tout entière a ici un sens, que n'ont ni la conditionnelle ni la conséquente prise isolément. On ne peut répondre à la question : n est-il entier ? pas plus qu'à $cosn\pi$ est-il égal à 1 ? Pour y répondre, il faudrait que "n" fût le nom propre d'un nombre, nécessairement un nombre déterminé. On écrit la lettre "n" avec une intention de généralité. Et on suppose que cette lecture une fois remplacée par le nom propre d'un nombre, la proposition conditionnelle et la conséquence acquerront un sens.
>
> Certes il y a bien lieu de parler d'indétermination, mais "indéterminé" n'est pas un qualificatif épithète de "nombre", c'est plutôt un adverbe modifiant "indiquer". On ne dira pas que "n" désigne un nombre indéterminé, mais qu'il indique de manière indéterminée des nombres. Il en va toujours ainsi lorsque la langue

[30] *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, (Montalant : Paris, 1696). Cité par M. Serfati dans 'La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russel' in *La recherche de la vérité*, 1999, p.168.
[31] ibid., p.170.
[32] sic. [Note de l'auteur].

arithmétique emploie des lettres, à l'exception des rares cas où elles figurent comme des noms propres (π, e, i). Elles désignent alors des nombres déterminés invariables. Il n'y a donc pas de nombres indéterminés et la tentative de M. Czuber a fait long feu.

Il tente ensuite de remédier à cet autre défaut, qu'il est impossible de concevoir une variable en la distinguant d'autres variables. Appelant la totalité des valeurs que peut prendre une variable son domaine [*Bereich*], il écrit : "la variable x peut être tenue pour définie si, pour tout nombre réel que l'on désigne, on peut dire s'il appartient ou non au domaine de la variable". Elle peut être tenue pour définie ; mais l'est-elle ? Puisqu'il n'y a pas de nombre indéterminé, il est impossible de définir un quelconque nombre indéterminé. On veut poser que le domaine est un critère pour la variable. En ce cas, au même domaine correspond la même variable : dans l'équation "$y = x^2$" y serait la même variable que x, si le domaine de x est celui des nombres positifs.

Cette tentative doit être considérée comme un naufrage, d'autant que l'expression "une variable prend une valeur" est tout à fait obscure. Une variable doit être un nombre indéterminé : comment donc un nombre peut-il prendre un nombre – car la valeur est évidemment un nombre ? Est-ce qu'un homme indéterminé prend, lui aussi, un homme déterminé ? On dit bien, par ailleurs, qu'un objet prend une qualité ; le nombre doit donc ici jouer deux rôles : comme objet il est variable ou grandeur qui varie, comme propriété il est une valeur. La raison pour laquelle on préfère le terme "grandeur" à "nombre" est qu'il faut ici s'abuser soi-même, ne pas voir que la grandeur variable et la valeur qu'elle prétend recevoir sont au fond la même chose. Nous ne sommes pas dans le cas où un objet prend successivement diverses propriétés, et il ne peut donc pas être question de variation. » [Frege, 1971, p. 162-164]

La définition du terme « variable » ne se fit donc pas, comme révèle le discours de Frege, naturellement. Qualifier un nombre comme étant « indéterminé » semble poser problème et peut être aussi, nous l'avons vu, à l'origine de débats philosophiques.

Si la définition de cette « notion » parmi les mathématiciens s'est accompagnée de certaines difficultés, dans l'enseignement le problème ne se pose pas. Dans le contexte scolaire, en effet, c'est plutôt le fait de travailler les différents statuts de la lettre qui relève des difficultés. Nous verrons dans ce paragraphe, par le biais de travaux didactiques, quelques caractéristiques de l'apprentissage de la « notion » de variable et dans quelle mesure elles se veulent en rapport avec l'analyse épistémologique de ce terme. Nous nous appuierons dans un premier temps sur les travaux de Radford (1999) pour ensuite aborder l'analyse des écrits didactiques de Ursini et Trigueros (1996, 1997).

Dans son étude, Radford s'intéresse à l'usage et à la production des symboles par des élèves de Troisième (*grade 8*) au sein d'activités portant sur la généralisation de patrons que Radford nomme « patrons géométrico-numériques » [Radford, 1999, p.37]. L'épisode analysé a lieu pendant le deuxième mois des classes, après une première introduction aux « concepts » (cf. Radford) de patrons et successions, au programme de Mathématiques (et plus précisément d'algèbre) prévu pour les classes de Troisième en Ontario. Lors de l'introduction de ces « concepts », Radford a observé que les élèves avaient tendance à utiliser autant de lettres qu'il y avait de variables dans le problème, sans prendre en compte leurs éventuelles relations. C'est dans le souci d'aider de tels élèves que Radford propose le problème que nous décrivons dans ce paragraphe.

Radford s'intéresse plus particulièrement :

- A l'aspect asymétrique du discours (notamment à la part inégale de l'intervention de chaque élève dans le dialogue) ;
- A la pensée en tant que processus « extra-cérébral » (c'est-à-dire à l'usage des mots, des dessins ou de crayons comme outils de la pensée);

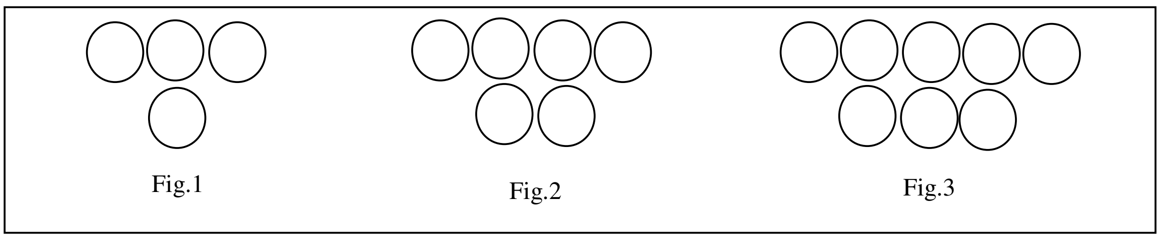
- Aux mécanismes d'objectivation médiatisée (l'emploi d'un crayon pour désigner les figures, par exemple) ;
- Aux schémas discursifs au sein de la classe (c'est-à-dire à la structure du discours).

Nous retrouvons les lignes directrices de son étude tout au long de la retranscription du discours, au travers les détails que Radford inclut dans chaque dialogue, décrivant au mieux les actions des élèves et de l'enseignant. Nous n'allons cependant pas reprendre ces critères dans notre analyse ; nous nous restreindrons essentiellement à dresser une analogie entre les aspects épistémologiques de l'introduction de la notion de variable et quelques caractéristiques relatives à son enseignement relevées dans ses travaux.

Dans un souci de clarté de l'exposé, nous reproduisons ci-après le problème analysé, suivi d'un extrait de la transcription de l'épisode[33].

L'énoncé du problème se traduit comme suit :

« *Soit le patron suivant* :



a) Combien de cercles y a-t-il
** Dans la partie supérieure de la figure n°6?*
** Dans la partie inférieure de la figure n°6?*
** En tout, dans la figure n°6 ?*

b) Combien de cercles y a-t-il
** Dans la partie supérieure de la figure n°11?*
** Dans la partie inférieure de la figure n°11?*
** En tout, dans la figure n°11 ?*

c) Combien de cercles y a-t-il dans la partie supérieure de la figure n° "n" ?

d) Combien de cercles y a-t-il en tout dans la figure n° "n" ? Justifier votre réponse! »

Nous reproduisons ci-après un extrait de la transcription du dialogue échangé entre les élèves lors de la résolution de ce problème. Radford nous présente, dans ses écrits, les dialogues ayant eu lieu

[33] Original en espagnol. Traduction de l'auteur.

lors de toute la résolution de problème. Cependant, à des fins de concision et clarté de l'exposé, nous nous restreindrons à la retranscription des moments où les élèves résolvent les questions c) et d), c'est-à-dire où les élèves passent du registre numérique au registre algébrique, ayant alors affaire à la notion de variable. Nous invitons toutefois le lecteur à se reporter à l'article dont il est ici question pour une étude plus approfondie du problème posé par Radford.

Les moments qui serviront de base pour notre analyse sont, dans l'original, intitulés : « L'interprétation du "nombre quelconque" ». Nous noterons E1, E2 et E3 les élèves que Radford nomme Elève1, Elève2 et Elève3[34].

1 :41 (21) **E2** : Wow ! (*faisant référence à la question précédente*) Elle était facile celle-là. (*Lisant maintenant l'autre question*) Combien de cercles y a-t-il dans la partie supérieure de la figure ... ? (*l'élève fait face à l'expression « ... la figure n »* [35]) Quoi ? (*lance brusquement la feuille vers les deux autres élèves*). O.K. Que quelqu'un d'autre le fasse !

1 :59 (22) **E1** : (*lit la question*) Combien de cercles... ?

2 :01 (23) **Enseignant** : (*s'approchant de la table où les élèves travaillent*) Etes-vous réveillés ce matin ?

2 :03 (24) **Elèves** : Oui !

2 :05 (25) **E1** : Qu'est-ce que ça veut dire ? (*faisant référence à la question du problème*)

2 :07 (26) **E2** : Je ne sais pas (*jette son crayon sur la feuille*)

2 :13 (27) **E1** : Quelle est la figure n ? (*inaudible*)

2 :22 (28) **E1** : Shut up (*parle à E2*) I'm going to kill you (*expressions idiomatiques que Radford a préféré ne pas traduire*) Ce n'est pas la lettre de l'alphabet ?

2 :33 (29) **E2** : (*parle à E1*) Demande au professeur

2 :48 (30) **E1** : (*compte les lettres de l'alphabet qu'il a écrit sur la table*) Quatorze. Alors (*reformule la question avec cette nouvelle idée*) combien de cercles en tout y aura-t-il…

2 :53 (31) **E2** : (*interrompt*) Non, pas en tout (*en montrant que la question à être résolue est la question c, non pas la question d*)

2 :54 (32) **E1** : (*prend la parole*) Combien de cercles y aura-t-il dans la ligne supérieure de la figure 14 ? n est 14

3 :00 (33) **E2** : Non ! Ce n'est pas 14 !

3 :01 (34) **E1** : Oui ! Oui, ça l'est *! (à ce même instant le professeur s'approche du groupe*)

3 :02 (35) **E3** : Qu'est n ?

3 :04 (36) **E2** : (*s'adressant à l'enseignant*) Qu'est n ? Nous ne savons pas…

[34] Radford procède à une brève description de quelques caractéristiques de ces élèves que nous ne reprenons pas ici. A nouveau, le lecteur intéressé se reportera aux documents originaux qui servent de base à notre analyse.

[35] Observons que Radford énonce cette question dans le problème en utilisant l'expression « ... la figure n° « n » », or ici il parle de l'expression « ... la figure n », ce qui, pour nous, n'est pas tout à fait équivalent. Nous reviendrons sur ce point par la suite, nous restons cependant fidèle au texte original. [Note de l'auteur].

3 :08 (37) **Enseignant** : (*tourne la feuille à l'endroit et lit à haute voix*) Combien de cercles y a-t-il dans la partie supérieure de la figure numéro n ?

3 :13 (38) **E3** : (*reprenant sa question*) Qu'est n ?

3 :15 (39) **E1** : n est la quatorzième lettre de l'alphabet, n'est-ce pas ?

3 :20 (40) **E2** :(*adoptant l'idée de E1 et comptant les lettres que celui-ci avait écrites*) un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze.

3 :28 (41) **Enseignant** : (*pendant que E3 réfléchit à nouveau sur la question, voyant que le professeur ne fournit pas de réponse*) n est un nombre quelconque.

3 :32 (42) **E2** : O.K.

3 :33 (43) **E1** : Qu'est n ?

3 :35 (44) **Enseignant** : un nombre quelconque (*tandis que E3 revient à la question a*)

3 :39 (45) **E1** : Je ne comprends pas

3 :41 (46) **Enseignant** : Tu ne comprends pas ?

3 :42 (47) **E1** : Non

3 :43 (48) **E3** : (*inaudible ; tient la feuille entre ses mains et semble vouloir parler au professeur lorsque celui-ci lui pose une question*)

3 :44 (49) **Enseignant** : Comprends-tu ce qu'est n ?

3 :45 (50) **E3** : Pour laquelle ? (*faisant allusion aux figures*) celle-ci, celle-ci ou celle-ci ? (*et désigne les figures à l'aide de son crayon*)

3 :46 (51) **Enseignant** : Peu importe

3 :50 (52) **E3** : (*inaudible*) C'est le terme multiplié par… (*montre les figures sur la feuille*)… Ces trois ci (*indiquant la partie inférieure de la figure 3*)… On a deux de plus ici (*faisant allusion à la partie supérieure de la figure 3*) (*silence*)

4 :10 (53) **Enseignant** : (*s'adressant à E2*) Et toi ? As-tu une idée de ce qu'est n ?

4 :12 (54) **E1** : (*interrompt*) 14

4 :13 (55) **Enseignant** : Ca peut être 14…

4 :14 (56) **E2** : (*interrompt*) Peu importe le nombre ?

4 :15 (57) **Enseignant** : (*poursuivant sa phrase*)… ça peut être 18, ça peut être 25…

4 :18 (58) **E1** : Ah ! Ca peut être n'importe quel nombre ?

4 :19 (59) **E2** : (*interrompt*) Le nombre qu'on veut

4 :20 (60) **E1** : O.K. alors (*prenant la feuille*) O.K., n peut être euhh…

4 :26 (61) **E2** : Douze

4 :27 (62) **E1** : Oui

4 :28 (63) **Enseignant** : Mais… Oui. Que vas-tu écrire ?

4 :31 (64) **E1** : 12

4 :32 (65) **E2** : 12

4 :33 (66) **Enseignant** : Et si vous vouliez parler d'un nombre quelconque ? Comment pourrions-nous connaître… comment pourrions-nous connaître le nombre de cercles d'un terme quelconque ? (*faisant un geste dynamique avec la main, comme s'il touchait un à un chaque terme de la série, en créant presque, manuellement, l'objet qu'il a été impossible de créer à l'aide des mots*...)

(silence)

4 :51 (67) **E2** : Figure n ? Il n'y a pas de figure n

4 :54 (68) **E1** : (*s'adressant à E2*) On vient de t'expliquer que n est ce que tu veux !

4 :57 (69) **E2** : (*interrompt E1*) Qu'est-ce que c'est ça ?

5 :01 (70) **E1** : O.K. Hm… sept (*en écrivant sur une feuille qu'on vient de lui donner*)

5 :10 (71) **E2** : Non, en haut. Il y a sept cercles (*prend la feuille et regarde*)

5 :13 (72) **E1** : Oui ! Et en dessous il y a cinq cercles

5 :21 (73) **E2** : (*écrit la réponse et lit la question suivante*) Combien de cercles y a-t-il en tout… ? (*inaudible*)… 12 cercles (*écrit la réponse*)

(*E1 reprend la feuille*)

5 :42 (74) **Enseignant** : Alors, euh… (*regarde la feuille*) Attend !Attend ! Mais pour un nombre quelconque… Ce que vous avez fait vaut pour sept cercles, mais si sept… pour n'importe lequel…

5 :52 (75) **E2** : (*montre la feuille à l'aide de son crayon*) On ajoute 2 au nombre du bas… Ca fait… ah, non, on ajoute 2 au nombre du haut. Si c'est sept le nombre qui…

6 :01 (76) **Enseignant** : Pourrais-tu écrire ceci à l'aide d'une formule ?

6 :04 (77) **E3** : Euh...

6 :05 (78) **Enseignant** : ... (*poursuivant sa phrase*) en employant n ?

6 :06 (79) **E3** : Euh... C'est le terme fois deux plus deux

6 :10 (80) **E2** : Le terme fois deux plus deux ?

6 :12 (81) **E3** : (*montre une figure sur la feuille à l'aide du crayon*) Euh... 2 fois 6... 2 fois 3 égal à 6, plus 2...

6 :21 (82) **Enseignant** : Tu peux répéter ? (*montre les figures sur la feuille*)

6 :23 (83) **E3** : Oui. Le terme fois deux plus 2 (*E2 écrit l'explication sur la feuille tandis que le professeur observe ce qu'écrit l'élève*)

6 :28 (84) **Enseignant** : Ecris-le

6 :30 (85) **E2** : (*dit ce qu'il écrit*) Le terme fois deux plus deux

6 :37 (86) **E1** : (*lit la réponse*) O.K. Le terme fois deux plus deux

6 :41 (87) **Enseignant** : Tu comprends ? (*s'adressant à E1*)

6 :42 (88) **E1** : Oui, oui je comprends

6 :42 (89) **E2** : (*répond en même temps*) Oui

(...)

7 :38 (107) **Enseignant** : (*désignant la feuille du doigt*) Et si vous vouliez utiliser la lettre n dans la formule ?

7 :42 (108) **E2** : (*tournant la feuille à l'endroit*) n fois deux plus deux (*l'élève écrit la formule sur la feuille*)

Il nous semble important de commenter, en quelques lignes, la résolution des questions a) et b) avant d'amorcer l'analyse de l'extrait de l'épisode que nous venons de retranscrire.

Soulignons tout simplement le fait que les élèves observés par Radford dans cette étude n'ont pas éprouvé de difficultés majeures à trouver le nombre de cercles qui composent les figures n°6 et n°11. Pour répondre aux questions a) et b), les élèves n'ont pas eu recours au dessin (en ce sens qu'ils n'ont pas dessiné les figures n°6 et n°11) et ont rapidement observé (en une minute) que le nombre de cercles qui compose la partie inférieure d'une figure est égal au nombre de la figure (E2 : « Regarde ! Figure 1, un cercle, figure 2, deux cercles, figure 3, trois cercles, ... figure 6, six cercles » (...) E2 : « c'est le nombre de la partie du bas ! ») et que le nombre de cercles qui compose la partie supérieure est égal au nombre de la figure plus deux (E1 :« C'est plus deux à chaque fois »).

L'aisance avec laquelle les élèves ont résolu les questions « numériques » du problème (les questions a et b ont été résolues en une minute et quatre secondes) ne s'est pas reproduite lors de la résolution de c) et d). Il leur a fallu, nous avons vu, non seulement beaucoup plus de temps (en tout six minutes et trente-huit secondes) mais également plusieurs interventions de la part de l'enseignant jusqu'à fournir la réponse attendue.

Le problème auquel ces élèves font face se situe, à notre avis, moins au niveau de la « compréhension » de la construction de la série de figures qu'à la compréhension de l'interprétation de la lettre *n* (rappelons que les élèves observent d'une part - en ce qui concerne le nombre de cercles dans la partie du haut – que « c'est plus deux à chaque fois » et d'autre part que « c'est le nombre de la partie du bas »). En d'autres mots, ces élèves semblent capables d'avoir une vision « globale » de la série « virtuelle » de figures (les affirmations citées ci-haut ne dépendent notamment pas de la figure traitée) mais ne savent pas interpréter l'expression « la figure n° *n* » (cf. ligne (21)).

Nous pouvons à ce propos faire le lien avec le discours que soutient Frege. Les élèves semblent interpréter ici la lettre *n* comme étant le « nom propre d'un nombre », cherchant à tout prix associer à *n* une valeur numérique. La forme de la question c) du problème induit peut-être les élèves à une telle interprétation : plutôt que de parler de la «figure *n* », la question est formulée utilisant l'expression « la figure n° *n* ». Nous ne savons pas si écrire « figure *n* » aurait entraîné un plus faible désarroi de la part des élèves, nous émettons toutefois l'hypothèse que parler de « la figure n° *n* », juste après avoir parlé de « la figure n°6 » ou encore « la figure n°11 » a pu contribuer à l'interprétation des élèves de la lettre *n* dont l'épisode fait preuve.

Quoi qu'il en soit, les élèves, face à l'expression « figure n° *n* », ne savent quoi répondre. Dans l'épisode que nous décrit Radford (et plus précisément lors de l'intervention de l'enseignant), nous retrouvons la dialectique de l'indéterminé, du problème que pose l'arbitraire mais fixé, largement débattue dans les travaux de Serfati[36] .

Bien que les élèves ne comprennent pas ce que signifie « la figure n° *n* », ils n'abandonnent pas le problème et tentent de trouver une explication raisonnable. Le choix d'associer à la lettre *n* le nombre 14 ne se fait pas aléatoirement et, même si cela ne correspond pas à la réponse attendue, il fait preuve de cohérence. Ce type de réponse a d'ailleurs déjà fait l'objet de plusieurs travaux didactiques, notamment parmi les écrits de Ursini et Trigueros. Nous retiendrons, des écrits de Ursini et Trigueros, essentiellement le cadre théorique utilisé dans leurs études.

Afin de mieux cerner la façon dont les élèves interprètent, conceptualisent et manipulent le concept de variable, Ursini et Trigueros ont procédé à une décomposition de celle-ci en plusieurs volets, suivant les différents rôles adoptés en algèbre. Si Frege parle de variable en termes de « nombre général », Ursini et Trigueros présentent deux autres composantes de ce concept. Non seulement, d'après elles, la compréhension de la notion variable passe par son interprétation en tant que nombre général (à travers des exercices permettant aux élèves de reconnaître un symbole pouvant représenter un objet indéterminé ou encore à travers des exercices stimulant la reconnaissance de patrons dans une série numérique/ géométrique) mais dépend également d'un travail autour de sa caractéristique relationnelle. Entre autres choses, d'après Ursini et Trigueros, les élèves doivent être capables de percevoir les relations existantes entre des quantités indépendamment de leur représentations (graphiques, tableaux, etc.), de déterminer les valeurs d'une variable (dépendante ou indépendante) selon la valeur de l'autre variable (dépendante ou indépendante) ou encore de symboliser une relation faite à partir de l'analyse de données d'un problème. Finalement, Ursini et Trigueros présentent un troisième aspect de la variable à prendre en compte lors de son apprentissage par les élèves : la variable en tant qu'inconnue particulière. Les élèves, à ce propos doivent, selon elles, pouvoir interpréter le symbole présent dans une équation comme un objet dont la valeur peut être connue une fois les restrictions considérées et doivent aussi être capables de remplacer la variable par une valeur dans le but de transformer une équation en une proposition vraie.

Nous ne retrouvons pas ces trois aspects de la variable dans l'analyse de Frege, qui met essentiellement en lumière l'idée de « nombre donné de façon indéterminée ». Les travaux de Ursini et Trigueros nous apportent ainsi de nouveaux éléments à prendre en compte lors de l'analyse du sens que donnent les élèves à la notion de variable, tant explorée en didactique de l'algèbre.

---

[36] Nous noterons l'allusion, implicite, à la question de l'indéterminé sous la plume de Condillac, lorsqu'il développe son chapitre sur les opérations portant sur les *quantités littérales* : « Le chiffre I, avec lequel nous exprimons l'unité, est*, comme l'unité, tout-à-fait indéterminé. Il peut être une unité simple, une dizaine, une centaine, un dixième, un centième, un quart, etc. Cependant il a par lui-même une signification. Les lettres sont des signes plus indéterminés encore. Parce qu'elles ne signifient rien par elle-mêmes, elles peuvent chacune signifier telles quantités que nous voulons (...) Les chiffres sont les noms particuliers, les lettres sont les noms généraux, et ce sont autant d'expressions qui entrent dans les phrases de calculs.» [Condillac, in *La langue des calculs*, édition critique par Sylvain Aroux et Anne-Marie Chouillet, 1981, p.274-275]

IV.2.4 - <u>La représentation de la mise à égalité</u>

Nous avons analysé dans les paragraphes qui précèdent, l'interprétation de quelques instructions opératoires élémentaires (simples ou composées) ou de leurs formes associées par quelques élèves. Ces instructions ou « formes » étaient jusqu'à présent analysées isolément, en ce sens où elles ne constituaient pas à elles seules des *propositions* mathématiques (cf. Serfati). En d'autres mots, les écritures étudiées jusqu'à présent ne traduisaient pas des procédures dites « achevées » (cf. Serfati), c'est-à-dire ne contenaient pas une instruction telle l'adéquation (« égaler les résultats »). Vu l'importance de telles *propositions* dans les écrits mathématiques, et ce depuis les Grecs, il nous semble essentiel d'étudier, à partir de quelques travaux didactiques, les interprétations d'élèves face à de tels énoncés « terminaux » (« égaler... »). Mais avant d'amorcer une telle analyse, souvenons-nous tout d'abord du parcours historique relatif à la mise en place du signe d'égalité dans les écrits mathématiques.

La représentation de la mise à égalité se limita pendant très longtemps au registre de la langue naturelle et ne trouva « traduction »[37] symbolique (les deux traits parallèles à la ligne d'écriture) qu'au milieu du XVIème siècle, dans *The Whetstone of Witte* de Robert Recorde (écrit en 1557). Le passage du rhétorique au symbolique ne peut cependant pas se caractériser en tant que « traduction », et voici nos arguments.

Parmi les textes mathématiques antérieurs à 1557, et même parmi les textes purement cossiques, le lecteur était souvent confronté, comme le décrit M. Serfati, à des expressions telles « *font, égalent, valent, aequalent, aequari, esgale, faciunt, ghelicjk, gleight, fara,* etc. » [Serfati, 1997, p.120]. Tel est le cas dans l'*Arithmetica Integra* (1544) de Stiefel :

> « Itaque 2 𝔵, multiplicatae in summam extremorum, id est, in 1 A + 1 𝔵, faciunt 2 𝔵 A + 2 ʒ, aequata 4335. Deinde 2 𝔵 multiplicatae in 2 A seu insummam omnium faciunt 4 𝔵 A aequata 6069. »[38]

Dans la phrase rhétorique, le verbe associé à la mise à égalité occupe la place centrale et l'interprétation de l'expression rhétorique de l'adéquation relève d'un aspect dissymétrique. Comme le décrit Serfati, « (…) la phrase rhétorique mathématique, dérivée de la syntaxe grecque puis médiévale, avait été, des siècles durant, structurellement prédicative. Et cette structure prédicative dissymétrique de l'affectation d'un attribut à un sujet, allait de soi dans l'expression rhétorique de l'adéquation.» [Serfati, 1997, p.121] Reprenons son exemple : dans « deux et trois font cinq », le « font » indique l'affectation d'un attribut (cinq) à un sujet (le résultat d'une instruction élémentaire).

Cette structure dissymétrique omniprésente dans le texte rhétorique persista dans les balbutiements de sa représentation sur le plan symbolique, notamment à travers la « boucle » (∝) de Descartes. Le symbole représentant l'adéquation créa bien deux places autour de lui, en amont et en aval, cependant celles-ci étaient le plus souvent occupées par des formes distinctes :

[37] Nous reviendrons par la suite sur ce terme.
[38] Exemple cité dans [Serfati, 1997, VI, p.120].

> « (…) à l'une des deux places (aval[39], le plus souvent) viennent des "formes" hiérarchisées complexes, l'autre étant dans tous les cas simplement occupée, soit par une "forme" élémentaire, soit par le chiffre zéro, comme dans l'exemple $z^2 \propto -az + b\,b$, où le "second membre" ($-az + b\,b$) continue ainsi d'apparaître en quelque sorte comme un attribut du premier. » [Ibid., p.121]

Ce fut Recorde qui, à travers la mise en place des « deux traits parallèles » dans le registre symbolique, commença d'effacer la trace de l'ancienne structure rhétorique et dissymétrique de l'égalité. Souvenons-nous d'ailleurs des arguments de Recorde pour le choix de tel signe : « rien n'est plus semblable que deux traits parallèles à la ligne d'écriture ». Le signe constitutif créa ainsi dans la ligne, deux places fixes (en amont et en aval du signe) pouvant être occupées de la même façon par des « formes » quelconques.

La mise à égalité n'a pas toujours été, nous avons vu, interprétée en termes d'équivalence (avec les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité) ; l'analyse de l'évolution de sa « symbolisation » nous en a fourni quelques indices. Il nous semble à présent important de confronter cette analyse épistémologique à une analyse didactique des interprétations de quelques élèves face aux expressions d'adéquation et au signe d'égalité. Car si le signe introduit par Recorde se veut jusqu'aujourd'hui destiné à représenter une relation d'équivalence, ses « propriétés » ne sont pas toujours facilement perçues.

Nous nous servirons plus précisément des travaux de A. Saenz-Ludlow et C. Walgamuth (1998) dans lesquels elles analysent les interprétations du signe d'égalité par quelques élèves de l'école primaire (*grade 3* – 8 ans*)*. Notre analyse sera basée sur la retranscription des échanges enseignant-élèves ayant lieu lors de la résolution deux tâches distinctes (que nous intitulons *tâche 1* et *tâche 2*). Afin de préserver toutes les subtilités langagières, nous avons choisi de laisser le dialogue en anglais, tel qu'il nous a été fourni dans l'original.

<u>*Tâche 1*</u>

Au début d'une séance, la question suivante avait été posée aux élèves.

Pour quel nombre l'expression numérique suivante est-elle vraie ?

$$\mathbf{246 + 14 = \square + 246}$$

Voici ci-dessous un extrait des échanges dans la classe. Nous avons respecté les notations des auteurs : les lettres *T* ou *Mrs. W* représentent l'enseignant, *S* ou *Ss* des élèves non-identifiés et *Ka, T, S, Sh*, *Me*, *Da* représentent des élèves précis. Les symboles /, // indiquent respectivement des pauses inférieures et supérieures à 2 secondes et les symboles ⎣, ⎡ indiquent des dialogues simultanés. Les points de suspension (…) indiquent certains mots inaudibles et les parenthèses décrivent des interactions non-verbales des participants.

[39] Il faut comprendre ici « amont ». Note de l'auteur.

1 **T** : Read the – read the question on the board Da.

2 **Da**: Which number will make the number sentence / true?

3 **T**: All right. Then read the number sentence for me Da.

4 **Da**: Two hundred forty-six plus fourteen equals / zer / equals

5 **S**: Box

6 **Da**: ⌊equals //

7 **T**: ⌈something //

8 **Da**: Plus two hundred forty-six

9 **T**: All right. So a number sentence // this is a number sentence, isn't it? / What does that equal sign mean? Remember when we talked about the equal sign? / Kr what does that equal sign mean?

10 **Ka**: Equals // It equals something?

11 **T**: What does that mean equals something? // I'm not sure some of you understand what the equal sign means. Sh?

12 **Sh**: It's / it's when you add something. The equal sign is there so you can put the answer by the equal sign.

13 **T**: So you're telling me that the equal sign then on the other side has to have the answer?

14 **Sh**: Well yeah. Cause equal // equals when you / equal sign is like when you add something up together / the equal is there so you can put the answer down.

15 **T**: Okay anyone else has an explanation? // Ka?

16 **Ka**: The equal sign is the sum. It's like if you / two / two hundred forty-six plus fourteen the sum is two hundred and sixty.

17 **T**: Mmm hmm. Okay. / So what does it mean that it's equal?

18 **Ka**: It means that the umm / that's what the // that's what the numb // that's what these two numbers added up to.

19 **T**: So you're saying these two numbers over here (showing 246 + 14) is the same as this number over here (showing the empty box on the right)?

20 **Ka**: No.

21 **T**: If you put them together?

22 **Ka**: Yeah.

Saenz-Ludlow et Walgamuth regroupent quatre caractéristiques du signe égal que cette « proposition numérique » (*number sentence*) devrait présenter :

- l'identité quantitative (*quantitative sameness*)
- l'unicité du nombre à remplacer dans la case afin que la proposition soit vraie
- le caractère non-significatif de l'ordre dans lequel l'addition est effectuée
- la validité de la proposition numérique (*true value of the numerical statement*)

D'après ces quelques lignes de dialogue, nous voyons clairement qu'aucune de ces caractéristiques n'est reconnue par les élèves. Pour ces élèves, le signe d'égalité évoque une action, il annonce le résultat de l'addition (souvenons-nous du « prompt », discuté dans IV.2.1). Tandis que pour *Kr* et *Sh*, le signe d'égalité est précisément le « souffleur », un prélude au résultat (ligne 10: « It equals something? », ligne 12 : « The equal sign is there so you can put the answer by the equal sign » ou encore ligne 14: « The equal sign is there so you can put the answer down »), nous retrouvons, à travers le dialogue de *Ka*, l'idée d'attribut associé au signe d'adéquation : *Ka* ne parle pas de résultat, elle se réfère plutôt à l'addition (ligne 16 : « The equal sign is the sum »).

On retrouve donc avec *Kr*, *Ka* et *Sh* les *font*, *faciunt*, *fara* du rhétorique. Le signe d'égalité est à ce stade interprété en tant que commande pour effectuer l'opération plutôt qu'en tant que relation d'équivalence. Aucune des quatre caractéristiques énumérées par Saenz-Ludlow et Walgamuth ne semble être prise en compte par les élèves. Cette interprétation du signe d'égalité a d'ailleurs déjà été exposée dans plusieurs travaux didactiques, tels ceux de Kieran [Kieran, 1981] ou encore dans [Behr, Erlwanger et Nichols, 1980], qui montrent une persistance des élèves (jusqu'en classe de Troisième) à attribuer à ce signe l'idée de résultat de l'opération arithmétique.

L'exemple suivant, que nous avons intitulé *tâche 2* (bien qu'il soit le prolongement du dialogue analysé précédemment), nous fournit plus de renseignements à propos de l'interprétation du signe d'égalité par ces élèves.

<u>*Tâche 2*</u>

(...)

45 **T** : Okay. / Sh ?

46 **Sh** : I think //

47 **T**: Do you think six plus six equals six plus six? Do you think that is right?

48 **Sh**: I disagree.

49 **T**: Tell me why.

50 **Sh**: Because / equals doesn't mean you put six plus six again. You're supposed to add the numbers up. / That's what equal means and you put the answer down. ⌈And

51 **T**: ⌊ What if it was six take away six?

52 **Sh**: Then //

53 **T**: Do I have to add to get on the other side?

54 **Sh**: No, you can subtract or add to ⌈ write the number down.

55 **T**: ⌊What if it was six times six?

56 **Sh**: Then you don't put six times six again. Cause that wouldn't be the answer.

57 **T**: Okay, so you're saying it had to be the answer. Equals mean you have to have an answer on the other side?

58 **Sh**: Yeah, because / see if equals wasn't there when you put all the / when you put all the numbers together / they want to know what's the answer. And you just don't put again six times six.

59 **T**: So you're telling me it's not true that six plus six equals six plus six? You say that's not true?

60 **Sh**: Yeah because six plus six equals twelve. / Not six plus six.

61 **T**: So six plus six does not equals six plus six?

62 **Sh**: Yeah.

63 **Ka**: Yeah, it does because both of them equal the same amount. / that could be real. You could do that.

64 **T**: Could I put six plus six equals / six plus six? (T writes the following equality on the board). 6+6 = 6+6

65 **Ka**: Yes.

66 **Mi**: Yes

67 **S**: No.

68 **T**: What is six plus six? Sh?

69 **Sh**: Six plus / six plus six equals twelve.

70 **T**: Oh, this is twelve (placing her hand over the left side of the equality) / And so what is this six plus six (placing her hand over the right side of the equality)?

71 **Sh**: Twelve.

72 **T**: (T writes 12 under each side of the equality 6+6 = 6+6) So you're telling me it's not true that twelve equals twelve? // Twelve does not equal twelve?

73 **Sh**: No / I don't get it. / That's equal.

74 **T**: try to reach out. Don't keep repeating the same thing to me. Try to reach out. / And think of something else. Cw what else do you have to say? Listen up Sh?

Ce dialogue illustre bien les propos que nous tenions précédemment, à savoir que le signe d'égalité sert, pour les élèves, à annoncer le résultat de l'opération. Comme pour la boucle de Descartes, il y a une dissymétrie (virtuelle dans le cas de nos élèves) de l'égalité. La place à l'amont du signe d'adéquation doit être occupée, selon *Sh*, par des instructions élémentaires tandis que la place à l'aval du même signe ne peut être occupée que par le résultat de ces instructions (ligne 56 : « Then you don't put six times six again. Cause that wouldn't be the answer »).

L'enseignant travaille ensuite sur un problème d'un autre registre associé au signe d'adéquation: celui de la validité d'une proposition qu'il organise. Comme l'observe Serfati : « (...) l'injonction "égaler" devait être comprise non seulement comme "mettez en relation d'égalité les résultats" mais aussi "jugez celle-ci valide" » [Serfati, 1997, p. 122]. Il y a donc lieu de distinguer l'énoncé d'une proposition de sa validité. C'est ainsi, en termes de validité de la proposition, que le dialogue se poursuit (ligne 59 : « So you're telling me it's not true that six plus six equals six plus six ? You say that's not true ? » ou encore ligne 61 « So six plus six does not equal six plus six? »). La réponse de *Sh* est révélatrice et montre bien la dissymétrie qu'elle associe au signe d'égalité : « Yeah, because six plus six equals twelve. / Not six plus six » (ligne 60). Cette interprétation du signe d'adéquation se révèle très persistante, même après l'explication de *Ka,* qui associe au signe d'égalité la représentation de la conservation des quantités (ligne 63 : « Yeah, it does because both of them equal the same amount. / That could be real. You could do that. »).

Par la suite, l'enseignant tente de convaincre les élèves d'abandonner l'interprétation « opératoire » du signe d'égalité en reprenant l'exemple de la proposition numérique (tâche1). Dans un souci de concision, nous limitons notre analyse aux deux tâches décrites précédemment et en dégageons ci-après les idées principales.

A travers les dialogues échangés entre l'enseignant et les élèves, nous avons pu établir quelques rapports entre l'interprétation des élèves du signe d'égalité et l'évolution de celui-ci à travers le temps. Le symbole aujourd'hui voué à représenter une relation d'équivalence est rarement interprété en tant que tel par les élèves. Comme plusieurs travaux didactiques ont déjà souligné, la majorité des élèves restent à un stade « opérationnel » de l'interprétation, accordant au signe d'égalité le statut d' « annonce de résultat d'opération ». Ainsi, l'expression « 6 + 6 = 6 + 6 » a peu de sens pour les élèves, qui s'attendent au résultat de l'opération après le signe d'adéquation[40]. Nous retrouvons ainsi chez les élèves une interprétation dissymétrique, caractéristique de l'écriture rhétorique, très persistante. Nous pouvons émettre l'hypothèse que cette interprétation est éventuellement un héritage de l'arithmétique, où le volet « résultat » du signe de mise à égalité est le plus souvent mis en valeur.

Après avoir étudié l'interprétation du signe d'adéquation par les élèves, il nous semble important de nous pencher sur l'analyse de l'interprétation du signe de l'inconnue, essentiellement présent lors des résolutions d'équations.

IV.2.5 - La représentation du requis

> « When it comes to algebra and we have to operate with *x* and *y* there is a natural desire to know what *x* and *y* really are. That, at least, was my feeling; I always thought the teacher knew what they were but wouldn't tell me. »
> Bertrand Russel

[40] De plus, les élèves ont tendance à refuser cette égalité sous prétexte qu'elle « n'apporte rien », en suivant le principe de « l'information maximale ».

La confusion entre requis et inconnu est ici volontaire. Nous avons souhaité, dans ce chapitre, analyser quelques travaux didactiques nous servant du découpage des six figures de la représentation introduit par M. Serfati (cf. paragraphes IV.1.1 à IV.1.6). Les titres choisis dans la présente section se veulent donc fidèles à la dénomination de ces six figures. Or il est rare, dans la littérature didactique, de trouver des travaux traitant de la représentation du « requis » ; on parle plutôt de la représentation de « l'inconnue » (et du choix de celle-ci). En fait, la confusion entre ces deux termes est ancrée dans l'histoire : comme nous l'avons vu dans le paragraphe IV.1.1, la dialectique requis-inconnu se veut caractéristique d'une certaine catégorie de problèmes présents depuis les mathématiques les plus anciennes, à savoir la recherche d'une « chose » inconnue vérifiant des conditions données. Ainsi, de Diophante à Descartes, requis et inconnu étaient-ils synonymes.

« Avec le temps cependant, se fit jour une dissociation entre les concepts de "requis" d'une part et d' "inconnu" d'autre part. Descartes en constitua dans la *Géométrie* le premier exemple historique : ce qui était inconnu dans le problème de Pappus (une certaine grandeur de signe *y*) n'y était pas en effet nécessairement recherché au sens alors usuel, c'est-à-dire l'objet d'une procédure inquisitoriale pour en déterminer la (les) valeur(s)[41], mais devait être seulement mis en relation avec une autre inconnue (de signe *x*). » [Serfati, 1997, p. 48]

Cette confusion entre requis et inconnu semble cacher une autre ambiguité, qui mit également longtemps à être soulevée. En effet, comme nous le décrit Serfati, « l'interprétation des signes primitifs[42] (…) suscita un problème initial de fond » [Ibid., p.45], se traduisant par une double conception de l' « inconnu ». Face à la présence de l' « inconnu » dans un texte mathématique, il convient de distinguer, la **part d'inconnu** que le texte recèle et la **substance inconnue** qu'il contient [ibid., p.45]. En d'autres mots, un texte mathématique peut comporter dans sa structure quelque chose qui n'est pas donnée, que le lecteur ne connaît pas (c'est la part d'inconnu dans le texte). Mais cet inconnu est différent de la substance inconnue dans la mesure où celle-ci est précisément « la valeur d'une grandeur, permanente[43] dans le texte, mais inconnue » [Ibid., p.45]. Comme l'observe Serfati :

« Si seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi, la confusion entre les deux conceptions est à la fois constante et implicite chez Diophante qui (…) n'utilise jamais qu'un seul signe pour désigner l'inconnue (ou l' "inconnu"). (…) En vérité, Diophante, pour qui le ζ est à la fois un signe et une marque dans le texte – signe d'une grandeur inconnue d'une part, marque d' "inconnu", d'autre part - se trouva ainsi contraint à ce que nous considérons aujourd'hui comme de véritables acrobaties dans le calcul. » [Ibid., p. 45]

Si Serfati affirme que « seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi », c'est sans doute parce que le « nous » auquel il se réfère c'est le « nous, mathématiciens ». Toutefois, à travers les travaux de K. Stacey et M. MacGregor (1997), nous verrons que cette confusion n'est pas

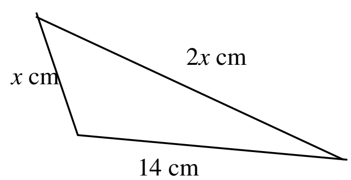
[41] Cf. A.T, VI, p. 399. par exemple, à la grandeur inconnue de signe y, Descartes associait en fait une autre grandeur également inconnue, de signe x et recherchait une relation entre les deux grandeurs. Ce qui était effectivement requis était donc une relation, c'est-à-dire en termes modernes une structure. [Note dans l'original]
[42] M. Serfati dénomme, provisoirement, « signe primitif » tout signe ne créant pas, contrairement aux signes opératoires, deux places dans la ligne d'écriture et pouvant se rencontrer seuls. A cette dénomination se substitue, par la suite, celle de « lettre ». [Note de l'auteur]
[43] Nous reviendrons sur ce terme par la suite. [Note de l'auteur]

rare parmi les élèves, qui ont souvent tendance, un peu comme Diophante, au signe pour l'inconnu de multiples référents.

Afin d'étayer nos propos nous nous intéresserons à trois énoncés de problèmes (nommés, comme dans l'original, problèmes TRIANGLE, MARK et BUS) proposés à des étudiants australiens âgés de 13 à 15 ans. Ces problèmes se veulent, selon Stacey et MacGregor, conforme aux problèmes fréquemment posés lors de l'introduction de l'algèbre au collège. Nous analyserons plus précisément les réponses de quelques élèves recueillies lors d'entretiens ultérieurs à la résolution des problèmes[44].

Problème TRIANGLE

The perimeter of this triangle is 44 cm. Write an algebraic equation and work out x.



………………………. x= …….

Problème MARK

Some money is shared between Mark and Jan so that Mark gets $5 more than Jan gets. Jan gets $$x$. Use algebra to write Mark's amount. …………………. If the money to be shared is $47, how much would Jan get? How much would Mark get?

Problème BUS

A bus took students on a 3-day tour. The distance travelled on Day 2 was 85 Km farther than on Day 1. The distance travelled on Day 3 was 125 Km farther that on Day 1. The total distance was 1410 Km. Let x stand for the number of Km travelled on Day 1.

Use algebra to work out the distance travelled each day.

Observons que tous les problèmes indiquent (plus ou moins explicitement) l'inconnue[45] à prendre en compte (dans les problèmes MARK et BUS la dénomination est d'ailleurs explicite). Toutefois, les élèves ne respectent pas toujours ces indications et souvent résolvent les problèmes en accordant au signe de l'inconnue (fourni par l'énoncé) différentes interprétations.

Stacey et MacGregor ont repéré trois différents modes d'interprétation de la lettre x vouée représenter l'inconnue :

[44] Nous invitons le lecteur à se reporter au document original pour une description plus précise de l'expérimentation.
[45] Observons que l'inconnue ne correspond pas au requis dans tous les problèmes (notamment dans le problème BUS, où il est demandé de trouver la distance parcourue chaque jour).

1. Pour quelques élèves, *x* peut représenter plusieurs inconnues en même temps.

2. Quelques élèves attribuent différentes valeurs à *x* tout au long de la résolution du problème (dans ce cas, les élèves ne considèrent pas l'inconnue en tant que «valeur d'une grandeur, permanente dans le texte, mais inconnue », en reprenant les termes de M. Serfati).

3. Quelques élèves interprètent l'inconnue comme étant toute quantité (ou toutes les quantités) qu'ils ne connaissent pas dans le texte.

D'après cette catégorisation, nous voyons que le mode 3 nous renvoie en quelque sorte à la confusion entre « part d'inconnu » et « substance inconnue » évoquée au début de ce paragraphe et que les modes 1 et 2 semblent montrer que certains élèves ne reconnaissent pas une des règles primordiales de la symbolisation : l'univocité de l'interprétation du signe (toutefois respectée dans le mode 3).

Plus précisément, pour le problème BUS, Stacey et MacGregor soulignent que quelques élèves ont écrit l'équation $x + 85 + 125 = 1410$ pour le résoudre, indiquant ainsi une interprétation du type 3 puisque, selon eux, la lettre *x* représente pour ces élèves toutes les quantités inconnues du problème.

Pour illustrer cette même catégorie d'interprétation, les auteurs de l'expérimentation citent également la réponse de l'élève Dean, que nous retranscrivons ci-après.

> « For TRIANGLE, he works out *x* to be 10 but writes down his solution as $x = 30$. He then says that is wrong, and writes $x = 10 \times 3$ as his final answer to the problem. He explains, "It is three lots of 10".» [K. Stacey et M. MacGregor,1997, p. 194]

Selon Stacey et MacGregor, même si Dean semble savoir que la longueur représentée par *x* cm mesure 10 cm et que celle représentée par $2x$ mesure 20 cm, la lettre *x* sert à représenter, pour lui, tout ce qui n'est pas explicitement donné dans le problème. En d'autre mots, la lettre *x* sert à représenter la part d' « inconnu » du problème.

Les modes 1 et 2, d'autre part, peuvent être illustrés par les réponses de Marianne et Tim donnés aux problèmes TRIANGLE et MARK, respectivement. Voici ci-après les extraits des dialogues :

Marianne (mode 1):

«*M: you can't solve unless you know what x equals. If I knew what x meant in there* [indicating the side labelled 2x] *then I could do it. There's no way you can work it out from between those two* [indicating 2x and 14]. *What we are trying to do is to find out what both these x's mean, and we can't do it unless we know what that x [indicating 2x] means.* » [K. Stacey et M. MacGregor,1997, p. 193]

Tim (mode 2) :

« Tim writes $x + 5$ for Mark's amount, but extends it to make $x+ 5 = x$, saying that the *x* after the equal sign is "Jan's *x*". The interviewer queries him about the meaning of the other *x*.

I: *So what is this x?* [point to the first *x* in $x+5 = x$]

T: That's Mark's x.

I: And why do we add 5 to it?

T: Because Mark has 5 more dollars than Jan. No, that's not right, it should be Jan's x plus 5 equals Mark's x.

I: Could you write an equation to say that Mark and Jan have $47 in total?

The interviewer explains that to write an equation you don't have to work out a numerical answer first. Tim now thinks he should write what he would do to work out the answer.

T: x divided by half equals x [writes $x \div 1/2 = x$]

(…)

I: So you take the money and you halve it. It that what you mean?

T: Yes. » [K. Stacey et M. MacGregor,1997, p. 195-196]

D'après Stacey et MacGregor, la lettre x représente pour Marianne deux quantités inconnues différentes. Cela est flagrant notamment lorsque Marianne parle des « deux x » (« *What we are trying to do is to find out what both these x's mean* »), et c'est ce qui la bloque pour résoudre l'équation. Puisque Marianne estime qu'il y a deux inconnues dans l'équation et qu'elle ne sait pas résoudre une équation à deux inconnues, elle ne sait résoudre le problème. A moins, comme elle le dit, de connaître la valeur de x (la voilà alors prise dans un cercle vicieux…).

L'exemple de Tim illustre en particulier[46] le mode 2 puisque la lettre x lui sert tantôt à désigner la quantité que possède Jan, tantôt toute la somme, ou encore la moitié de cette somme. De plus, comme l'observent les auteurs, « (…) he [Tim] is not sure whether the x in (x + 5) is "Jan's x" or "Mark's x". Since (x+5) represents Mark's money, he first thinks, not reasonably, that the x in it should be "Mark's x". » [K. Stacey et M. MacGregor,1997, p. 196].

Nous avons vu à travers ces exemples, d'une part, que si la confusion entre part d' « inconnu » d'un problème mathématique et substance inconnue qu'il contient disparu depuis Diophante, il n'est pas rare de retrouver actuellement sa trace parmi les interprétations de quelques élèves. Ces exemples montrent d'autre part que l'univocité de l'interprétation du signe, une des règles premières pour l'emploi de celui-ci, n'est pas toujours respectée par les élèves, qui ne semblent pas contrariés par l'attribution de multiples valeurs (ou multiples référents) à une même lettre symbolisant l'inconnue. En guise de conclusion, les auteurs affirment:

> « The success of students at the three schools mentioned above indicates that explicit teaching of the logical basis of algebraic problem solving is effective and should be more widely used. » [K. Stacey et M. MacGregor, 1997, p. 197].

Il reste toutefois à définir ce que pourraient être les « fondements logiques » intervenant dans la résolution de problèmes…

[46]Selon Stacey et MacGregor, l'interprétation de Tim de la lettre *x* illustre les trois modes. [K. Stacey et M. MacGregor, 1997, p. 196]

CHAPITRE V – L'EXPERIMENTATION

Dans le chapitre précédent, nous avons voulu mettre en rapport didactique et épistémologie, nous servant plus précisément du découpage de M. Serfati pour guider nos lectures didactiques. Ce faisant nous avons trouvé, parmi certains travaux didactiques se rapportant au symbolisme algébrique, une résonance à l'étude épistémologique décrite dans les chapitres antérieurs. A travers cette double analyse, nous avons notamment décelé, dans des réponses d'élèves, des modes de raisonnement similaires à ceux mis en évidence par les travaux épistémologiques. Cette mise en rapport a permis, nous l'avons vu, une plus grande finesse dans l'analyse de certaines productions d'élèves et un nouveau regard sur le rapport des élèves au symbolisme.

Il nous semble à présent important non plus de raffiner les analyses didactiques existantes à partir des études épistémologiques, mais plutôt de construire des « situations »[1], dans le cadre du symbolisme algébrique, qui se voudraient produit de l'alliance entre didactique et épistémologie. La conception de celles-ci doit répondre à un double objectif. Il nous semble essentiel, d'une part, de faire en sorte que les situations traduisent les idées dégagées par l'analyse épistémologique. En d'autres mots, il s'agit tout d'abord de créer des situations représentatives des propos épistémologiques tenus précédemment. Celles-ci devraient, d'autre part, nous permettre de mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent, à travers quelques exemples, dans quelle mesure l'analyse épistémologique peut apporter de nouveaux éléments à l'étude didactique de certaines productions d'élèves. Il s'agit donc à présent d'approfondir cette analyse, en proposant des tâches, *lato sensu*, susceptibles d'enrichir les connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme.

Le double objectif que nous venons de décrire charpentera la forme du présent chapitre. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la description et à l'analyse des situations proposées. A travers l'analyse de celles-ci, développées sous forme d'exercices théoriquement destinés à des élèves du collège et lycée, nous veillerons à mettre en exergue les liens entre chaque activité et les éléments épistémologiques sur lesquels la conception s'appuie. Il s'agira, ensuite, d'analyser dans quelle mesure certaines des situations élaborées peuvent fournir de nouveaux éléments de réflexion concernant le rapport des élèves au symbolisme. Plus précisément, après avoir décrit la mise en oeuvre de certains exercices dans différentes classes, nous analyserons, en tenant compte des idées épistémologiques développées antérieurement, différentes productions d'élèves.

[1] Le terme « situation » est ici employé dans une acception très générale. Notre objectif sera davantage précisé dans ce qui suit et une terminologie spécifique sera alors définie. Cependant, à ce stade encore introductif de notre dessein, nous conserverons un vocabulaire très générique.

V.1 – L'illustration de trois idées épistémologiques

Jusqu'à présent, nous nous sommes servis du découpage en six figures de la représentation employé par M. Serfati pour structurer une double analyse didactique et épistémologique. Si ce moule s'est révélé particulièrement bien adapté pour la première phase de notre travail, nous ne nous en servirons point cependant pour la conception des exercices.

En effet, plutôt que d'envisager des exercices destinés à caractériser chaque figure de la représentation, nous avons choisi d'élaborer des situations « diagonales » vouées à illustrer les principales idées dégagées de l'analyse épistémologique du symbolisme algébrique. De l'analyse épistémologique du symbolisme algébrique, nous exploiterons plus précisément trois grandes idées, repérées et décrites de façon plus ou moins explicite tout au long de l'étude de chaque figure de la représentation. Nous traiterons, d'une part, les deux démarches (théoriques) d'exploration d'une écriture symbolique: la procédure analytique -c'est-à-dire celle adoptée par l'auteur- et la démarche synthétique -adoptée par le lecteur. Ensuite, après avoir abordé la question de l'usage de lettres dans la résolution d'un problème mathématique, nous illustrerons l'importance de la substitution dans la manipulation de symboles algébriques.

Avant d'aborder l'analyse des exercices proposés, quelques commentaires s'imposent.

Les exercices qui font l'objet de ce chapitre ont été conçus, nous l'avons souligné, de façon à mettre en évidence les rapports entre didactique et épistémologie dans le cadre du symbolisme algébrique. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à illustrer, à travers quelques exercices, les trois idées épistémologiques précitées. Définissons à présent de façon plus claire ce que nous entendons ici par *exercice* et, pour ce faire, rappelons la définition de **type de tâches**, introduite par Chevallard:

> « A la racine de la notion de praxéologie se trouvent les notions solidaires de *tâche*, t, et de *type* de tâches, T. Quand une tâche t relève d'un type de tâche T, on écrira parfois $t \in T$. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un verbe: *balayer* la pièce, *développer* l'expression littérale donnée, *diviser* un entier par un autre, *saluer* un voisin, *lire* un mode d'emploi, *monter* l'escalier, *intégrer* la fonction $x \to x\ln x$ entre x=1 et x=2, etc. » [Chevallard, 1998, p.92. Italiques dans l'original].

En reprenant cette terminologie, nous pouvons dire que nous avons associé, à chaque idée épistémologique, différents types de tâches, en mettant l'accent sur différents volets de chaque idée. Ainsi, par exemple, associés à l'idée des deux démarches d'exploration d'une écriture symbolique, se trouvent cinq types de tâches, tandis que l'idée relative à la substitution est illustrée par deux types de tâches seulement. L'examen des éléments théoriques ayant inspiré l'élaboration de chaque type de tâche précèdera l'énoncé de chaque exercice, sous l'intitulé « introduction épistémologique et problématique », où le lecteur trouvera notamment, lorsqu'il est pertinent, l'explicitation du type de tâche envisagé. Venons-en finalement à la définition du terme *exercice* tel qu'il devra être compris dans ce chapitre. Les types de tâches, comme l'indique leur définition, se réfèrent à un large ensemble d'activités. Ainsi, de même que, par exemple, au type de tâche « calculer avec des vecteurs », peuvent être associés différents exercices, chaque type de tâche que nous avons relevé peut être illustré par différents exercices. Ainsi, nous dirons que les *exercices* que nous proposons sont des exemples d'instantiations[2] de tâches relatives à chaque type de tâche. En d'autres mots, à chaque type de tâche peuvent être associés différentes tâches dont nous fournissons quelques possibles (ce sont les *exercices*) en jouant sur certaines variables définissant ce type de tâche[3].

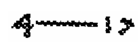
De la définition des exercices proposés découle une particularité qui leur est associée et qui mérite d'être soulignée : leur caractère non exhaustif. Non seulement nous n'avons pas la prétention d'exhiber tous les différents types de tâches associés à chaque idée, mais il est évident que les exercices proposés, instantiations des types de tâches, ne recouvrent pas tous les possibles respectant l'objectif fixé (i.e. illustrer l'idée épistémologique en question). Le lecteur avisé interprètera alors chaque exercice comme un élément d'une certaine catégorie, et nous veillerons, autant que possible, à en exhiber quelques variantes.

Finalement, nous noterons que le niveau scolaire du public auquel chaque exercice peut être destiné n'est pas unique. Nous verrons qu'il est possible d'envisager un même exercice à plusieurs niveaux scolaires, en modifiant notamment les expressions algébriques qui y figurent[4]. Cependant, pour des raisons pratiques, nous avons restreint l'éventail de notre public. Les exercices présentés dans les prochains paragraphes ont été originellement destinés à des élèves de fin de collège ou début de lycée ; en effet, le programme d'algèbre enseigné à ce niveau semble être particulièrement bien adapté aux questionnements épistémologiques que nous nous proposons d'aborder[5].

V.1.1 – <u>Les deux démarches d'exploration d'une écriture symbolique</u>

V.1.1.1 - <u>Exercice T1</u>

<u>Introduction épistémologique et problématique</u>

Dans l'édition de 1526 du *Behennde unnd hüpsch Rechnüg auff allen Kauffmanschafften*, premier traité imprimé (d'Arithmétique) contenant les signes de la croix (+) et du trait (-), Widmann met à la disposition du lecteur une succession d'assemblages élémentaires et leur « traduction ». Ainsi, à côté de l'assemblage élémentaire , se trouve l'explication de sa notation : « Ajoutez le nombre 30 au nombre 3 ». Il en va de même pour l'expression , que le lecteur devait interpréter, selon Widmann, comme l'instruction : « Retranchez le nombre 17 du nombre 4 ».

[2] Terme introduit par M. Serfati dans [Serfati, 1997].
[3] Dans ce qui suit, le terme tâche, décontextualisé de la notion de « type de tâches », devra être compris dans son acception plus générale.
[4] Nous analyserons également, à ce moment, les limites des variantes des divers exercices.
[5] Nous nous sommes notamment inspirés, pour quelques exercices, d'exercices usuellement proposées en classe de 2[nde].

Sous la plume de Clavius, dans l' *Algebra* (1608), nous retrouvons à nouveau des instructions d'addition ou soustraction, cette fois-ci cependant agrémentées de signes cossiques. Ainsi, l'expression 1℞ - 7, par exemple, devait s'interpréter, si l'on reprend l'explication première des « figures » symboliques (cf. paragraphe IV.1.3) fournie par Widmann, comme l'instruction suivante : « De la valeur de l'inconnue, retranchez le nombre 7 ».

M. Serfati résume, dans les deux cas, la visée de l'auteur :

> « (...) fournir au lecteur la représentation symbolique d'une *instruction* élémentaire, c'est-à-dire d'une règle pour l'exécution d'une action ou opération (ici la soustraction) portant sur deux quantités, qui sont, soit des nombres connus, soit des grandeurs inconnues. » [Serfati, 1997, p.57].

Ainsi, dès la fin du XVIème siècle, le lecteur placé devant des assemblages élémentaires tels ceux précités, était en mesure de les interpréter c'est-à-dire, rappelons-le, de leur apporter des significations.

Une telle interprétation rhétorique s'étendit aux assemblages de niveau supérieur à un, une fois prescrit un ordre[6] aux assembleurs. Ainsi, face à l'expression : « $(2 + x)\ .\ 3,5$ », le lecteur interprétait : « Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe x. Multiplier ensuite le résultat obtenu par le nombre de signe 3,5. »[7] De façon générale,

> « (...) l'interprétation des assemblages dûment complétés ainsi élaborés s'est donc trouvée être l'exécution d'instructions composées, c'est-à-dire d'une succession d'instructions élémentaires dans un ordre séquentiel prescrit. » [ibid., pp.74-75]

C'est précisément en restant dans ce cadre d'interprétation d'une expression en tant que succession d'instructions, tout en nous inspirant d'exercices proposés à des élèves de 2[nde] dans quelques manuels scolaires[8] que nous avons envisagé ce premier type de tâche. L'élève (théorique) est ici en position de lecteur d'une expression algébrique et doit traduire, à travers une série d'instructions, l'expression mathématique proposée. Nous retrouvons, dans ce type de tâche, illustré par l'exercice suivant, le volet algorithmique de la traduction des « figures » symboliques proposée par Widmann et adoptée par ses successeurs.

<u>Exercice T1 - Énoncé</u>

Inspire-toi de l'exemple fourni pour répondre aux questions suivantes.

[6] Afin de lever toute ambiguïté (cf. section III.1.4).
[7] Exemple cité dans [Serfati, 1997, p.74].
[8] Collection *Pyramide*, Hachette, 2000, p. 122.

Exemple :
La suite des instructions

- prendre un nombre x
- le multiplier par 2
- soustraire 5 au résultat
- prendre la racine carrée du résultat
- ajouter 3 au résultat

constitue un algorithme de calcul qui permet d'obtenir au final : $\sqrt{2x-5}+3$.

Écrire un algorithme permettant d'obtenir chacune des expressions suivantes :

a) $[5(2+x)]^2$

b) $\sqrt{3+\frac{1}{x}}+2$

c) $[2(-x+3)]^2$

Commentaires et variantes

L'exercice proposé ci-dessus, destiné à illustrer le volet algorithmique de la traduction des « figures » symboliques présentes dans différentes expressions algébriques, ne doit pas être interprété, comme nous l'avons déjà mentionné, en tant qu'exercice « fermé ». Il peut non seulement s'adapter à différents niveaux scolaires (en modifiant la complexité des expressions mathématiques en jeu[9]), mais aussi présenter plusieurs variantes pour son application au sein d'une même classe. Avant d'exhiber une variante possible de cet exercice (en modifiant notamment l'environnement dans lequel il est proposé), passons à quelques commentaires relatifs aux expressions algébriques choisies et à leur traduction sous la forme d'algorithme.

Tout d'abord, il est intéressant d'observer que, pour des expressions où intervient le signe d'une inconnue[10], la première instruction qui figure dans l'algorithme est celle relative à l'inconnue (souvent exprimée sous la forme : « prendre un nombre x »), indépendamment du lieu que celle-ci occupe dans l'expression.

Dans l'exemple de l'énoncé précité, où le signe x figure « en premier plan », cette observation paraît aller de soi. Or pour l'expression (a), ceci se produit également. Dans ce cas, le signe de l'inconnue, qui n'est pas visuellement premier[11] dans l'expression, doit aussi être considéré, pour des raisons de clarté d'énoncé, en premier lieu. Si l'ordre des opérations effectuées par le lecteur impose, nous avons vu, la primauté à l'opération d'addition (cf. paragraphe IV.1.4), il ne fixe aucune

[9] Nous reviendrons sur la notion de complexité lors de l'analyse des exercices.
[10] Le cas où plusieurs inconnues sont présentes sera traité ultérieurement. Nous ne traiterons pas ici le cas d'expressions numériques ; soulignons cependant l'intérêt d'un tel exercice dans des classes de 6ème ou 5ème, notamment au moment de l'enseignement des priorités des opérations.
[11] Si l'on considère une lecture de gauche à droite.

hiérarchie pour les éléments qui la composent : le nombre de signe 2 et le nombre inconnu de signe *x* sont en effet considérés, sur ce plan, égaux. Cependant, le présent exercice attribue implicitement une primauté au signe d'inconnue, théoriquement inexistante.

Ce phénomène est d'ailleurs plus flagrant si on analyse l'expression (b), où le signe de l'inconnue est au dénominateur d'une fraction, elle-même seconde[12] composante de l'addition. Dans ce cas, où, soulignons-le, la fraction revêt un statut particulier (il s'agit de l'inverse de l'inconnue), on commencera par écrire: « prendre un nombre *x*, prendre son inverse, etc. ». Tandis que la primauté accordée à l'inconnue relevait, dans le cas de l'expression (a) de la clarté d'expression, elle s'avère nécessaire[13] pour la description algorithmique de l'expression (b).

Ce dernier exemple nous mène vers l'analyse d'une autre catégorie d'expressions, plus complexes que celles présentées dans cet exercice. Il s'agit d'expressions où figurent des fractions rationnelles ne se réduisant pas à « $1/x$ » . Prenons par exemple l'expression $3+\frac{10}{2x-1}$. Si, dans l'exemple précédent, nous avons pu traiter la fraction « $1/x$ » en tant qu' « inverse du nombre inconnu de signe *x* », nous ne pouvons désormais plus faire appel à ce type d'instruction. Encore une fois –et ici de façon plus évidente- la structure de la fraction impose que nous commencions par considérer l'inconnue. La suite d'instructions traduisant cette expression est certes plus longue que celle décrivant les expressions considérées auparavant, mais tout à fait envisageable : « prendre un nombre *x*, le multiplier par 2, soustraire 1 au résultat, diviser 10 par le résultat obtenu, ajouter 3 au résultat ».

Analysons finalement le cas où figurent plus d'une inconnue dans l'expression algébrique. Considérons, par exemple, l'expression : $\frac{(a+2)^2}{\sqrt{b+1}}$. Ici, la présence du signe d'inconnue à la fois au numérateur et dénominateur de la fraction nous oblige à traiter deux blocs d'instructions « en parallèle », hiérarchiquement équivalents. On dira, par exemple : « prendre un nombre *a*, ajouter 2, élever au carré le résultat, prendre un nombre *b*, ajouter 1, extraire la racine carré du résultat, diviser le premier résultat par le second ».

Nous pouvons résumer les quelques éléments d'analyse de ce premier exercice comme suit. La complexité de celui-ci n'est point liée au niveau (cf. Serfati) des expressions algébriques. En effet, l'expression que nous venons de considérer, de niveau 3, nous semble moins évidente à décrire sous forme d'algorithme (il faut en effet « garder en mémoire » des résultats intermédiaires) qu'une expression de niveau 4, telle $(4x+5)^2-2$. Il nous semble, en effet, que lorsqu'il est possible de décrire

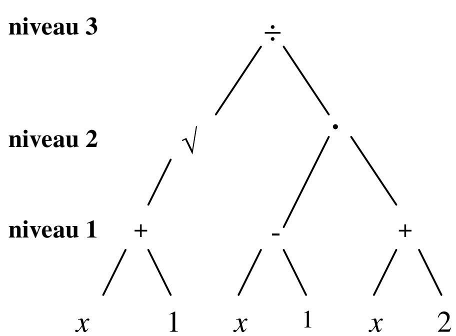
[12] Toujours suivant le sens de la lecture.

[13] En effet, selon la règle de l'exercice, il s'agit de décrire l'expression algébrique sous forme algorithmique, chaque phrase correspondant à une instruction. Si l'on choisissait de décrire l'addition en commençant par le nombre 3, on se trouverait rapidement dans une impasse : « prendre le nombre 3, ajoutez-le au nombre 1, divisez celui-ci par le nombre inconnu *x* ... ». Etant donné qu'à chaque phrase une seule instruction est permise, il n'est pas possible de résoudre l'impasse en disant : « prendre le nombre 3, ajoutez-le à l'inverse du nombre inconnu *x*, etc. », auquel cas il n'aurait pas été nécessaire de considérer l'instruction relative à l'inconnue en premier lieu.

l'expression sous la forme d'un enchaînement de résultats, la tâche devient plus facile. La complexité d'une expression n'est donc pas uniquement fonction de son niveau mais aussi du nombre de ramifications de l'arborescence combinatoire qui la détermine. Illustrons notre propos à travers l'examen de l'arborescence relative à deux expressions algébriques de niveaux différents[14].

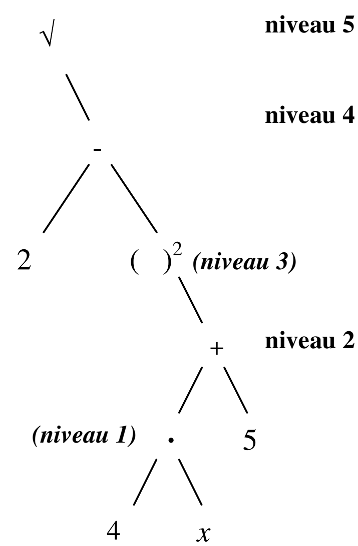
Expression de niveau 3

$$\frac{\sqrt{x+1}}{(x+2)(x-1)}$$



Expression de niveau 5

$$\sqrt{(4x+5)^2-2}$$



Le diagramme de chacune des expressions présente un racine, correspondant à la représentation de l'assembleur de plus haut niveau (le signe représentant la division pour l'expression de niveau 3 et le signe relatif à la racine carrée pour celle de niveau 5) puis des branches et feuilles, celles-ci correspondant aux assembleurs de plus faible degré (dans le cas de l'expression de niveau 3, nous retrouvons le signe *x* et les nombres 1 ou 2 comme les assembleurs de niveau zéro, et dans le cas de l'expression de niveau 5, le signe *x* et les nombre 4, 5 et 2).

La représentation de l'expression de niveau 5 sous forme d'arborescence traduit bien l'idée d'enchaînement d'instructions que nous évoquions. Pauvre en ramifications, cette arborescence, constituée d'une longue branche principale, suggère une lecture plus « linéaire », plus séquentielle, contrairement à celle induite par la lecture de l'arborescence de l'expression de niveau 3 qui représente, à travers ses multiples ramifications, plusieurs résultats intermédiaires. Ainsi, même si

[14] Nous avons choisi une expression de niveau trois et une autre de niveau cinq afin de bien marquer l'indépendance entre le niveau d'une expression et sa complexité (dans le cadre de traduction sous forme algorithmique), cependant notre réflexion reste valable pour les expressions de niveau 3 et 4 que nous venons de traiter. Notons par ailleurs qu'au terme *niveau,* vient se substituer le terme *profondeur* (d'un sommet d'une arborescence) dans la théorie des graphes, qui présente une ordination inverse à celle des niveaux. Dans le souci cohérence de notre discours, relatif aux expressions plutôt qu'aux arborescences, nous avons choisi de conserver la terminologie relative à celles-là.

l'expression $\sqrt{(4x+5)^2-2}$ se veut de niveau supérieur à celui de $\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+2)(x-1)}$, sa traduction sous forme algorithmique se révèle plus aisée, dès lors que la lecture de son arborescence se fait moins « en parallèle » et plus « enchaînée ».

Ci-après nous proposons une variante[15] de cet exercice, obtenue en modifiant le scénario, c'est-à-dire en changeant le contexte dans lequel il est posé. Bien qu'il soit exprimé sous une autre forme, cet exercice nous semble aussi bien adapté que celui précité pour répondre à la problématique et nous pouvons imaginer sa mise en oeuvre aussi bien dans un environnement papier-crayon[16] que dans un environnement informatique. Nous verrons cependant qu'une telle variante entraîne quelques limitations quant aux expressions proposées.

<u>Exercice T1 bis – Énoncé</u>

Inspire-toi de l'exemple fourni pour répondre aux questions suivantes.

Exemple :
L'expression $[2(-x+3)]^2$ peut être décrite par le schéma :

$x \xrightarrow{\text{opp}} \quad \xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{\text{x2}} \quad \xrightarrow{(\ )^2} \quad f(x)=[2(-x+3)]^2$

Légende : « $\longrightarrow$ » : faire l'opération qui est indiquée au-dessus, « $(\ )^2$ » : élever au carré, « opp » : prendre l'opposé,« $\sqrt{\ }$ » : prendre la racine carrée « 1/ » : prendre l'inverse, etc.

Faire un schéma qui décrit les expressions a), b) et c).

a) $[5(2+x)]^2$

b) $\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}+2$

c) $\sqrt{2x-5}+3$

<u>Commentaires</u>

Un bref commentaire à propos de cette nouvelle mise en oeuvre de l'exercice T1 s'impose.

Nous avons dit, plus haut, que le présent exercice se veut une variante de l'exercice T1, en modifiant l'environnement dans lequel celui-ci est proposé. Il nous semble, en effet, que celui-ci est aussi bien adapté que T1 pour répondre à la problématique de la double ordination d'exploration d'une expression algébrique et plus précisément à l'idée théorique de l'interprétation d'une expression en tant

[15] Nous reviendrons par la suite sur ce terme.
[16] Nous retrouvons un exercice semblable dans le manuel de 2nde de la collection *Fractale*, Bordas, 2000, p.152.

que succession d'instructions. Ainsi, nous dirons que l'exercice T1 bis est un nouvel exemple du type de tâche « construction d'une expression algébrique –donnée- à travers une suite d'instructions », associé à la problématique épistémologique précitée. Or cette variante, telle qu'elle est présentée, impose quelques limites quant au type d'expressions algébriques en jeu.

Observons que l'énoncé de cet exercice propose des expressions données sous la forme d'un enchaînement d'instructions, les unes à la suite des autres, chacune faisant directement appel au résultat précédemment obtenu. Ainsi, quelques catégories d'expressions, traitées dans l'analyse de l'exercice T1, ne peuvent être ici proposées.

Tel est le cas d'expressions où interviennent des fractions ne pouvant être traduites en termes « d'inverse ». Considérons par exemple l'expression $\frac{2}{3x+1}$. Tandis que pour l'exercice T1, la suite d'instructions pouvait être donnée rhétoriquement par : « prendre un nombre x, le multiplier par 3, ajouter 1 au résultat, diviser 2 par le résultat obtenu », la formulation du présent exercice exige que le dernier résultat obtenu soit « actif dans l'instruction donnée ». Autrement dit, si l'on peut envisager par exemple la division de $3x+1$ par un nombre, on ne peut représenter, à travers le schéma proposé par l'exercice, la division d'un nombre (autre que 1) par $3x+1$[17]. De façon plus générale encore, une fraction où numérateur et dénominateur sont tous deux fonctions d'une inconnue (d'une même inconnue ou de plusieurs inconnues distinctes) n'est pas non plus envisageable. Par exemple, la fraction $\frac{5x}{3x+1}$ ne peut pas être décrite à travers l'enchaînement d'instructions que propose cet exercice, de même que l'expression présentée et analysée dans T1 : $\frac{(a+2)^2}{\sqrt{b+1}}$.

Ces limites débordent le seul cadre des fractions. Il est en effet facile de s'apercevoir que, pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment, l'expression $5x(3x+1)$ (en analogie avec la fraction précitée), telle qu'elle est écrite, ne peut pas non plus figurer dans l'exercice. Il en va de même pour la somme : $\sqrt{2x-3}+x$. A travers cette variante de l'exercice T1, en effet, les instructions doivent constituer des résultats qui s'enchaînent ; il n'est pas possible, comme dans T1, de travailler des éléments indépendamment les uns des autres, pour ensuite les regrouper.

Nous pouvons conclure en disant que la variante de l'exercice T1 semble présenter, de par la forme de son énoncé, essentiellement les expressions considérées comme étant les plus «simples » parmi celles analysées dans T1. N'interviennent en effet uniquement les expressions se traduisant par un enchaînement « linéaire » d'instructions, le niveau des expressions étant alors un des éléments déterminants de la complexité des expressions. Finalement, nous pouvons affirmer que cet exercice est beaucoup plus qu'une simple variante du précédent. Il se révèle en réalité un cas très particulier de celui-ci, où tous les opérateurs sont traités comme étant unaires (« ajouter trois », « multiplier par 5 ») et numériques (le signe d'inconnue n'intervient en effet qu'une seule fois dans l'algorithme de reconstruction de l'expression, constituant le premier maillon de la chaîne). Ainsi, si nous voulions représenter l'arborescence combinatoire de cette expression, nous nous rendrions rapidement compte qu'elle est constituée d'une seule branche, à l'origine de laquelle se trouve l'inconnue « *x* ».

V.1.1.2 - Exercice T2

Introduction épistémologique et problématique

L'expression rhétorique de l'interprétation de l'écriture symbolique (appliquée par le lecteur) s'est caractérisée, nous l'avons vu, par une succession d'instructions prescrites dans un ordre bien défini. En effet, pour déchiffrer une expression algébrique, le lecteur part des assembleurs de plus bas niveau (cf. Serfati) et reconstruit progressivement la hiérarchie, appliquant une démarche synthétique (cf. Serfati). Ainsi, l'expression $[5(2+x)]^2$ sera interprétée rhétoriquement par le lecteur à travers la série d'instructions: « Ajoutez le nombre de signe 2 au nombre de signe *x*. Multipliez le résultat par le nombre de signe 5. Élevez le dernier résultat au carré ».

Or l'expression rhétorique de l'interprétation faite par le lecteur d'une écriture symbolique, conforme à la visée de l'auteur, se montre être en sens inverse de la visée de celui-ci. Prenons l'exemple précité. En effet, si le déchiffrage de l'écriture symbolique par le lecteur commence par l'interprétation des assembleurs de plus bas niveaux (l'instruction d'addition), la volonté première de l'auteur est de représenter symboliquement un « carré » (dont l'exponentié est lui-même le résultat de la multiplication de deux facteurs, etc.), signe qui structure l'expression. En d'autres mots, si l'auteur d'une écriture algébrique est guidé par la signification de celle-ci, le lecteur, quant à lui, l'aborde en commençant par les assembleurs les plus internes, les plus immédiatement reconnaissables sur le plan combinatoire[18].

Si dans les exercices précédents nous avons placé l'élève (théorique) en position de lecteur d'une expression (en ce sens où il lui était demandé de traduire l'interprétation d'écritures algébriques données), il nous semble à présent intéressant de concevoir un exercice où l'élève, à l'inverse, joue le rôle d'auteur[19] d'une expression, c'est-à-dire qu'il doit traduire symboliquement la visée d'un auteur

[17] Ceci est vrai si l'on ne suppose pas une ré-écriture (au moins mentale) de l'expression. En effet, on peut envisager la description à travers un « schéma » si on l'écrit sous forme de produit: 2 x $\frac{1}{3x+1}$. Observons toutefois que, dans ce cas, l'assembleur principal n'est plus le même.

[18] Soulignons le fait que cette double ordination, rattachée aux démarches de reconstruction et de décomposition, traduit des démarches théoriques, qui ne se veulent ni purement synthétiques ni purement analytiques. Comme le note Serfati, la lecture effective d'une écriture symbolique relève d'un mélange entre analyse et synthèse, « (...) la synthèse venant après-coup consolider localement les avancées de l'analyse. » [Serfati, 1997, p.101]. De la même façon, pour ne pas perdre de vue la totalité de son expression, l'auteur doit également considérer les assembleurs de plus bas niveau en même temps que ceux conceptuellement plus importants.

[19] Nous reviendrons par la suite à la pertinence de ce terme dans le cadre des expérimentations.

exprimée en langage naturel. Cette réflexion est à l'origine d'un nouveau type de tâche (la traduction symbolique d'une expression algébrique donnée en langage naturel), illustrée par l'exercice suivant:

Exercice T2 - Énoncé

Écrire les phrases suivantes sous la forme d'expressions algébriques :

a) Le double du carré de *a*
b) La somme du carré de 5 et du double de *a*
c) La différence de 3 et du produit de 5 par *x*
d) Le carré de la somme de 7 et de *x*
e) Le quotient de la somme de 3 et de *a* et de la différence de *b* et de 8.

Commentaires

L'exercice que nous venons de proposer présente, comme les exercices précédents, une souplesse relativement grande pour sa mise en oeuvre. En effet, il nous semble qu'il peut aussi bien être adapté à des élèves de 4ème (en limitant les expressions à celles du type « le double du carré de *a* », c'est-à-dire des expressions de niveau maximum deux), qu'à des élèves de 3ème ou de 2nde (en complexifiant les expressions, en introduisant notamment la racine carrée, le cube, etc.) [20]. Soulignons toutefois que la complexité des expressions est fortement limitée par la forme de l'énoncé. Nous avons en effet présenté, à travers cet exercice, uniquement la description rhétorique d'expressions de niveau deux. Pourtant, nous voyons que la lecture de celles-ci ne se fait pas toujours très aisément[21] (notamment pour la phrase (e)). Il nous parait donc judicieux de faire figurer des expressions de niveau trois au maximum, si nous espérons un investissement minimal des élèves dans la résolution d'un tel exercice.

Par ailleurs, cet exercice nous semble bien illustrer la problématique épistémologique décrite ci-dessus et met en évidence, si nous le comparons aux précédents, les deux différentes ordinations relatives aux positions théoriques adoptées par le lecteur et l'auteur. En effet, les expressions ici écrites en langage naturel traduisent bien la visée de l'auteur : le signe qui structure l'expression, le premier conceptuellement parlant, est le premier considéré par l'auteur (il s'agit, dans l'expression (b), par exemple, de la somme).

Finalement, nous pouvons imaginer que la résolution de cet exercice (et éventuellement la difficulté à le résoudre) révélera un autre aspect développé dans l'analyse épistémologique. Pour traduire chaque phrase, l'élève est confronté en première instance à l'expression rhétorique de l'assembleur de plus haut niveau mais il doit, pour écrire l'expression symbolique, également considérer les assembleurs les plus internes. Ceci est davantage flagrant dès que l'expression

[20] Un exercice similaire est d'ailleurs proposé dans le manuel de 2nde de la collection *Fractale*, Bordas, 2000, p.152

[21] Une caractéristique incontournable de toute lecture exhaustive.

rhétorique se complexifie. A travers l'expression : « La différence de 3 et du produit de 5 par x », l'objectif premier de l'auteur est bien de représenter une différence, mais pour définir les termes de celle-ci, l'auteur est obligé de considérer le produit, assembleur de niveau plus bas que la différence. La résolution de cet exercice devrait donc illustrer le constant va-et-vient, décrit dans l'étude épistémologique, entre démarche analytique et synthétique, appliquée (notamment) par l'auteur d'une écriture symbolique.

V.1.1.3 - Exercice T3

Introduction épistémologique et problématique

Même si, nous l'avons vu, les deux différentes démarches sont appliquées par un même protagoniste, les deux exercices précédents (T1 et T2) placent théoriquement l'élève sous une unique position. Si l'exercice T1 illustre la démarche du lecteur, T2, à l'inverse, est un exemple de type de tâche où la composition d'expressions symboliques est en jeu. Il nous a donc semblé intéressant de développer une situation, au sens large du terme, où l'élève joue à la fois le rôle d'auteur et de lecteur d'une expression algébrique, une sorte de combinaison des exercices T1 et T2 décrits ci-dessus. L'exercice suivant est donc une instanciation d'un autre type de tâche : celui de la « traduction sous forme d'algorithme d'expressions algébriques données ».

Exercice T3 – Énoncé

Inspire-toi de l'exemple fourni pour répondre aux questions suivantes

Exemple
La suite des instructions

- prendre un nombre x
- le multiplier par 2
- soustraire 5 au résultat
- prendre la racine carrée du résultat
- ajouter 3 au résultat

constitue un algorithme de calcul qui permet d'obtenir au final : $\sqrt{2x-5}+3$.

Écrire les phrases suivantes sous la forme d'un algorithme.

a) Le tiers de la somme des carrés de x et y

b) Le carré de la somme de 2 et de x

c) La racine carré du double de a

Commentaires

Dans cet exercice, les deux positions théoriques de reconstruction et de décomposition sont envisagées. En effet, l'élève aborde le problème en tant qu'« auteur » de l'expression. Afin de résoudre l'exercice, *i.e.* traduire chaque phrase sous la forme d'un algorithme, l'élève devra (implicitement ou explicitement) d'abord compléter la démarche de l'auteur, c'est-à-dire représenter sous forme symbolique la « pensée de l'auteur », laquelle était exprimée en langage naturel. Dans un second temps, il s'agira pour l'élève de changer de rôle en adoptant, à l'inverse, la démarche du lecteur : il devra décrire l'expression algébrique « trouvée » en tant que succession d'instructions (comme il était question pour l'exercice T1).

Nous pouvons imaginer que la difficulté de résolution d'un tel exercice peut être en partie liée à la problématique des deux différentes ordinations (décroissante -associée à la position de l'auteur- depuis les assemblages de plus haut niveau et croissante – associée à la position de lecteur- depuis les assembleurs moins élevés) auxquels l'élève est confronté.

Soulignons toutefois que les expressions algébriques doivent être, pour la bonne mise en oeuvre d'un tel exercice, comme il était question pour l'exercice T2, de niveau supérieur ou égal à deux (telle l'expression (b)) et inférieur ou égal à trois. Cette limitation, précisons-le, étant davantage due aux limitations de la rhétorique pour décrire une expression algébrique (fournie par l'énoncé) qu'à la difficulté d'écrire l'algorithme qui la traduit. Nous avons vu, en effet, à travers l'exercice T1, qu'il était possible d'envisager la traduction d'expressions de niveau quatre sous forme d'algorithme, telle l'expression $(4x+5)^2 - 2$; le niveau de l'expression fournie n'étant pas le principal élément déterminant la complexité de la résolution de l'exercice. L'exercice T2, d'autre part, nous a montré que la lecture de la « traduction en langage naturel » d'expressions algébriques de niveau deux semble déjà ne pas se faire sans difficultés. Nous avons, de ce fait, montré que cela nous obligeait à limiter les expressions en jeu dans l'énoncé de l'exercice au niveau trois au maximum. Ainsi, dans le présent exercice, où l'élève est d'abord confronté à la traduction rhétorique d'une expression algébrique, les limitations du présent énoncé seront balisées par celles de l'exercice T2. En d'autres mots, puisque l'élève doit, dans un premier temps, traduire chaque phrase exprimée en langage naturel sous forme d'expressions algébriques, celles-ci doivent être, au maximum, de niveau trois.

Ceci nous conduit à une dernière remarque. A travers les exercices jusqu'ici présentés, nous nous avons eu affaire à deux « traductions rhétoriques » d'expressions algébriques : la traduction donnée sous forme de suite d'instructions (que l'on pourra dénommer traduction « algorithmique ») et la traduction décrivant la « structure » de l'expression (que l'on pourra dénommer traduction « structurale »). Ces deux expressions rhétoriques d'écritures symboliques ne peuvent pas, nous avons vu, être considérées sur le même plan. Même si toutes deux illustrent le passage de l'expression symbolique vers le langage naturel (ou vice versa), les problèmes qui relèvent de la traduction algorithmique et de la traduction structurale ne coïncident souvent pas. En ce qui concerne, par exemple, la complexité des expressions algébriques à traduire, nous avons vu qu'elles dépendent de la rhétorique en jeu : selon qu'elle est algorithmique ou structurale, le niveau de complexité sera plus ou moins lié au niveau de l'expression elle-même.

V.1.1.4 - Exercice T4

Introduction épistémologique et problématique

Dans tous les exercices qui précèdent, nous avons voulu illustrer la première[22] idée épistémologique, liée à la double ordination du déchiffrement d'une écriture algébrique, à travers quelques exercices mettant l'élève tantôt en position de lecteur, tantôt en position d'auteur et tantôt les deux. Avant de clôturer cette première partie, il nous semble à présent important d'envisager des tâches où la position adoptée par l'élève n'est pas explicitement déterminée (à travers l'énoncé du problème, notamment). Il s'agit alors de développer un exercice qui apporterait quelques éléments de réponse aux questions : comment les élèves décrivent-ils les expressions algébriques ? Trouverions-nous une résonance des propos épistémologiques tenus précédemment ? Voici un exemple d'énoncé d'exercice qui nous semble traduire ce questionnement[23].

Exercice T4- Énoncé

Voici une liste d'expressions mathématiques. Ton camarade, qui se trouve dans l'autre pièce, ne connaît pas ces expressions et c'est ta mission de les lui transmettre correctement.
Pour cela, tu dois envoyer un message écrit uniquement avec des mots, des « x » et des nombres, sans signes opératoires (comme si tu étais dans un cours de français!) de telle façon que ton camarade puisse deviner exactement l'expression que tu as sous les yeux.
Le récit que tu auras écrit sera donné à ton camarade et, à partir des instructions que tu auras données, il devra retrouver l'expression de départ.
A la fin, vous comparez tous deux les expressions mathématiques et vous aurez gagné si vos expressions sont les mêmes.

a) $[5(2+x)]^2$

b) $\sqrt{3+\frac{1}{x}}+2$

c) $3+\frac{10}{2x-1}$

d) $\frac{2x+3}{5x}-2$

e) $\frac{3x}{7}-\frac{1}{2x}$

[22] Hiérarchiquement première dans notre exposé.
[23] Nous verrons, par la suite, que le type de tâche que relève cet exercice n'est pas unique. Nous développerons cette observation dans le paragraphe « commentaires » qui suivra.

Commentaires

Précisons tout d'abord les conditions de mise en oeuvre (éventuelle) de cet exercice. Celui-ci a été conçu pour être traité en binôme. Un élève doit décrire à un camarade éloigné, en français et par écrit, l'expression mathématique qui lui est proposée. L'autre élève doit alors traduire sous forme d'expression mathématique les instructions écrites qu'il aura reçues. A la fin, la vérification de l'équivalence des expressions (celle du lecteur et celle de l'auteur) se fera collectivement, avec l'enseignant. Ainsi, le type de tâche sous-jacent à cet exercice ne peut être caractérisé de façon unique et dépend du rôle qu'adopte chaque protagoniste. En particulier, si le type de tâche correspondant à l'activité de l'élève émetteur du message peut se caractériser en tant que « décrire, en langage naturel, une expression algébrique donnée », celui-ci diffère du type de tâche illustré par T1 dans la mesure où le style de description rhétorique (structural ou algorithmique) n'est pas imposé. Le type de tâche concernant le destinataire du message est, d'autre part, moins facile à préciser car dépend de la nature du message envoyé. Nous pouvons toutefois dire qu'il correspond à l'écriture symbolique d'une expression algébrique fournie sous forme rhétorique.

Observons que l'application en classe de cet exercice ne peut être envisagée sans effectuer au préalable quelques modifications. Sur l'énoncé d'abord. Il doit être clair que l'élève tenant le rôle d'émetteur du message ne peut employer aucun signe opératoire, auquel cas sa « traduction » aurait été évidente. Il doit se voir obligé de décrire l'expression algébrique entièrement en langage naturel, les opérations élémentaires ne pouvant être écrites ni « *in extenso* » ni à travers des symboles (*i.e.*, l'élève ne peut avoir recours ni aux symboles tels « + », « - », ni aux noms « plus », « moins » ; seuls seront permis les verbes traduisant telles opérations, comme par exemple « soustraire », « ajouter », etc.). Un scénario où cette contrainte semble plus « naturelle » doit être envisagé[24].

S'il est vrai que dans l'énoncé il est question d' « instructions », en aucun cas nous ne souhaitons induire l'élève à appliquer une démarche algorithmique. L'objectif de cet exercice est précisément, entre autres, d'analyser les différentes formes employées par les élèves pour décrire une expression. Il nous semble cependant que, plus l'expression algébrique à décrire sera complexe, moins les élèves auront recours à une description rhétorique du type analytique (comme par exemple : « le produit de la somme de *a* et *b* par 5»). En effet, il nous semble, par exemple, peu probable de retrouver parmi les copies d'élèves, une telle description de l'expression (d). Mais les élèves auraient-ils recours à ce type de démarche dans les autres cas[25] ? Retrouverions-nous des descriptions rhétoriques qui

[24] La mise en oeuvre d'un tel exercice n'est point facile et demande de la créativité. Nous pouvons néanmoins imaginer, par exemple, un scénario où les élèves auraient à décrire les expressions mathématiques données uniquement à l'aide de cartons où seraient inscrits les symboles et mots « permis ». Nous pouvons également envisager la mise en oeuvre de cet exercice dans un environnement informatique, où l'élève devrait alors reconstruire l'expression mathématique uniquement à l'aide d'une palette de mots et symboles fournie par l'ordinateur.

[25] A ce propos, il est intéressant de mentionner l'exemple historique de Jérôme Cardan qui, dans *Ars Magna*, consacre toute une page au détail de l'élévation au cube du nombre (en notations modernes) :

sembleraient illustrer la position de lecteur d'une écriture symbolique telle celle décrite lors de l'analyse épistémologique ?

Soulignons également que le choix effectué par l'élève pour décrire sa lecture d'un assemblage élémentaire nous semble étroitement lié à l'environnement dans lequel il se place. En d'autres mots, nous pouvons imaginer par exemple que la « traduction » d'une écriture sera différente selon que l'élève doit la communiquer à un camarade ou l'introduire dans une calculatrice symbolique. Afin d'enrichir cet exercice, il nous semble donc important d'envisager plusieurs contextes différents et ainsi mettre en rapport les diverses réponses des élèves.

En dernier lieu, nous ne pouvons négliger l'importance de la structure des expressions choisies dans cet exercice. Analysons quelques unes des écritures algébriques proposées. Les expressions (c) et (d) sont sensiblement de même « type », *i.e.* la somme d'un quotient et d'un nombre. Cependant quelques différences doivent être prises en compte: d'une part l'ordre des termes est inversé et d'autre part le quotient de (c) est légèrement plus complexe (un assemblage de niveau 2). La structure de l'expression (e) nous semble, de par son « graphique », visuellement plus flagrante. Les élèves privilégieront-ils dans ce cas une description mettant en exergue la structure même de l'expression (i.e. une somme –ou différence) ? Compte tenu des particularités de chaque expression, le déchiffrement se fera-t-il différemment pour un même élève? Et, finalement, observerions-nous un écart non négligeable entre l'expression proposée et sa reconstruction obtenue à travers la description donnée par un des deux élèves composant le binôme ?

V.1.1.5 – Exercice T5

Introduction épistémologique et problématique

Nous avons vu que l'expression rhétorique de l'interprétation d'une écriture symbolique par le lecteur, bien que conforme à la visée de l'auteur, révèle un ordre de description inverse à l'expression rhétorique de celle-ci. Prenons l'exemple de l'expression $[5(2+x)]^2$. Si le déchiffrage de l'écriture symbolique par le lecteur commence par l'interprétation des assembleurs de plus bas niveaux (l'instruction d'addition), la volonté première de l'auteur est de représenter symboliquement un « carré », signe qui structure l'expression. En d'autres mots (et plus généralement), si l'auteur d'une écriture algébrique est guidé par la signification de celle-ci, le lecteur, quant à lui, l'aborde en commençant par les assembleurs les plus internes, les plus immédiatement reconnaissables sur le plan combinatoire.

A travers l'exercice T2, nous avons voulu mettre l'élève (théorique) en position d'auteur, pour lequel il s'agissait d'écrire, sous la forme d'expressions algébriques, la « visée de l'auteur » traduite en

---

$\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89\frac{1}{4}}}+\sqrt[3]{9\frac{1}{2}-\sqrt{89\frac{1}{4}}}-1$. La description « choisie » par Cardan est une suite d'instructions, mais qui, de par l'absence de délimitants pour indiquer la succession des opérations d'extraction de radicaux, langage naturel. L'élève devait ainsi, par exemple, exprimer sous forme d'expression algébrique la phrase « le double du carré de *a* », et par là même poursuivre une procédure propre à l'auteur.

Dans le présent exercice, non seulement la visée de l'auteur (exprimée en langage naturel) est fournie, mais l'expression algébrique correspondante l'est également. Le type de tâche envisagé consiste alors à la mise en relation d'une expression algébrique et de sa description rhétorique (deux « produits » théoriquement fournis par l'auteur), parmi un choix d'expressions et phrases données. La question que nous nous posons à présent est la suivante. Dans quelle mesure un élève qui *a priori* est placé en position de lecteur (puisqu'il est face à des écritures symboliques déjà fournies), parvient-il à se dégager de l'ordre de l'interprétation qu'il en fait pour reconnaître la « structure » de l'expression qui lui est donnée et donc se placer en tant qu'auteur de l'expression ?

Voici donc, pour clore l'analyse de la première idée issue de l'analyse épistémologique relative à la double ordination théorique de l'exploration d'une écriture symbolique, l'énoncé d'un exercice qui nous semble répondre à l'ensemble des questions précitées.

<u>Exercice T5 - Énoncé</u>

Pour les questions 1 à 3, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu :
a et *b* représentent deux nombres non nuls.

<u>Question 1</u>

A= $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$:	$\square$	n°1 :	L'inverse du carré de la somme de a et b
B= $\frac{1}{a^2+b^2}$:	$\square$	n°2 :	La somme des inverses des carrés de a et b
C= $\frac{1}{(a+b)^2}$:	$\square$	n°3 :	Le carré de la somme des inverses de a et b
		n°4 :	Autre(s) : $\square$

<u>Question 2</u>

A= $\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2$:	$\square$	n°1 :	Le tiers de la somme des carrés de a et b
B= $\frac{a^2+b^2}{3}$:	$\square$	n°2 :	La somme des carrés des tiers de a et b
C= $\frac{(a+b)^2}{3}$:	$\square$	n°3 :	La somme des tiers des carrés de a et b

comme le note Serfati [Serfati, 1997, p.106], rend sa lecture impraticable.

D= $\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3}$: ☐

n°4 : Le tiers du carré de la somme de a et b

n°5:Autre(s) : ☐

Question 3

A= $\frac{1}{ab}$: ☐

B= $\frac{1}{-a-b}$: ☐

C= $\frac{-1}{ab}$: ☐

n°1 : L'opposé de l'inverse du produit de a et b

n°2 : L'inverse du produit des opposés de a et b

n°3 : L'opposé du produit des inverses de a et b

n°4 :Autre(s) : ☐

Commentaires

Sur le « degré de liberté » de l'élève d'abord. Les questions 1 et 3 ne fournissent pas toutes les phrases décrivant les expressions algébriques données. Pour la question 1 par exemple, nous ne trouvons pas l' « équivalent », dans la colonne de droite, de l'expression $\frac{1}{a^2+b^2}$. Nous nous attendons donc à ce que l'élève écrive de lui même, dans le rectangle prévu à cet effet, la description rhétorique de cette expression. Seule la question 2 présente dans la colonne de droite (dans le désordre cependant) la traduction, en français, de toutes les expressions algébriques fournies dans la colonne de gauche.

Sur le type d'expressions algébriques choisies, à présent. Ce genre d'exercice ne peut être conçu, à notre avis, que pour des expressions algébriques relativement « simples », où interviennent au maximum trois opérations. En effet, comme nous l'avions déjà observé pour les exercices T2 et T3, la traduction en français d'expressions dont le niveau est supérieur à trois devient très vite beaucoup trop complexe, et les questions ne seraient certainement pas abordables par les élèves. Si d'un côté nous avons proposé, dans l'exercice T2, uniquement des expressions de niveau deux, ici toutes les expressions algébriques sont de niveau trois (à l'exception de « 1/*ab* »). A ceci nous attribuons deux raisons majeures. D'une part, le fait que l'énoncé fournisse à la fois les expressions algébriques et leurs traductions rhétoriques nous semble permettre l'augmentation du niveau de complexité des expressions proposées. D'autre part, les expressions de niveau deux ne permettent pas d'envisager un grand nombre de variantes pour leur possibles traductions rhétoriques. En effet, tandis que nous pouvons proposer deux traductions possibles seulement à l'expression « $2a^2$ » (le double du carré de *a* » et « le carré du double de *a* »), les expressions de niveau trois peuvent être à l'origine de plusieurs combinaisons (cf. question 2, pour laquelle il serait possible de proposer, dans la colonne de droite, six traductions rhétoriques distinctes).

Sur le choix de l'énoncé, finalement. La « traduction » en français d'une expression algébrique ne fait certes pas partie des coutumes d'une classe de mathématiques. S'il est vrai que nous retrouvons parmi quelques manuels scolaires et quelques tests d'entrée de 2nde des exercices qui y ressemblent, interpréter rhétoriquement une écriture algébrique n'est pas une tâche commune pour la plupart des élèves, quelque soit leur niveau scolaire. Si, à travers cet exercice, nous avions uniquement voulu analyser la façon dont les élèves reconnaissent la « structure » d'une écriture symbolique, il aurait été certainement préférable d'envisager un scénario différent de celui-ci ou tout du moins des scénari complémentaires. En effet la conversion vers la langue naturelle peut se révéler un obstacle majeur à la résolution de ce problème, ce qui pourrait induire de fausses conclusions. Or l'enjeu de cet exercice n'est pas uniquement lié à la reconnaissance de la structure d'une écriture symbolique ; il répond plus précisément à la problématique épistémologique que nous avons décrite ci-dessus. Certes, les réponses données par les élèves peuvent apporter quelques éléments concernant leur structuration d'une écriture algébrique (vu que les phrases en français correspondent à la description rhétorique des expressions mathématiques), cependant il est ici davantage question d'étudier la double position auteur-lecteur au sein d'un même exercice. Rappelons-le : il s'agit ici de voir dans quelle mesure l'élève, placé *a priori* en tant que lecteur d'une expression, parvient à incarner le rôle de l'auteur. Est-il capable de surmonter l'habitude de la lecture linéaire pour dégager la structure de l'expression mathématique qui lui est proposée ?

V.1.2 - <u>L'usage des lettres dans la résolution d'un problème</u>

Dans les exercices présentés précédemment, relatifs à la dialectique auteur-lecteur, nous avons tantôt placé les élèves en tant que lecteurs, tantôt en tant qu'auteurs, tantôt les deux. Nous rappelons toutefois que ces deux démarches traduisent des procédures essentiellement théoriques. Nous avons en effet observé que tant la démarche analytique que la procédure synthétique ne sont pas indépendamment mises en oeuvre: si le lecteur, d'une part, est tenu de re-constituer l'expression algébrique à laquelle il fait face (partant des assembleurs de plus bas niveau), il ne peut pour autant perdre de vue l'expression dans sa totalité et doit donc aussi considérer les signes structurants de l'expression. L'auteur qui, quant à lui, entreprend une démarche théoriquement analytique, doit également par moments prendre en compte les assembleurs de plus bas niveaux et donc localement se placer en position synthétique. Lecteur et auteur n'adoptent donc pas une démarche purement analytique ni purement synthétique[26]. Ainsi, en particulier, les exercices présentés dans les paragraphes précédents voués à illustrer la procédure de décomposition d'une expression ne placent pas les élèves en position purement analytique (démarche propre à l'auteur de l'expression).

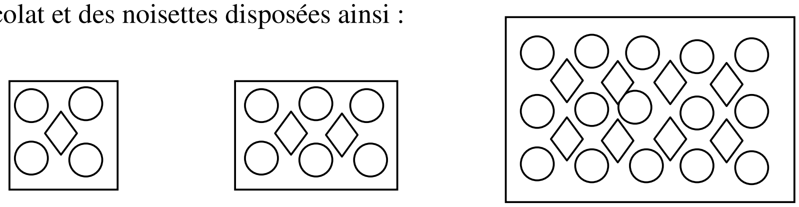
Or même si, sur le plan théorique, les élèves n'adoptent pas une démarche exclusivement analytique, nous devons observer que les exercices jusqu'ici présentés leur laissent rarement l'occasion de se placer en tant qu'auteurs d'expressions. En effet, dans la majorité des exercices qui précèdent, à l'exception des exercices T2 et T3 (où il s'agissait notamment d'écrire pour T2, sous forme d'une expression algébrique, la phrase : « le carré de la somme de 2 et de x » et où l'élève devait, pour T3, écrire l'expression algébrique avant de la décrire sous forme d'algorithme), les écritures symboliques étaient déjà fournies par l'énoncé, notamment dans l'exercice T5, où l'élève pouvait adopter à la fois la position d'auteur (s'il s'intéressait aux expressions rhétoriques de la colonne de droite) aussi bien que celle de lecteur. Bien que les exercices T2 et T3 laissent à la charge de l'élève la traduction de la phrase exprimée en langage naturel vers le langage symbolique (qui constitue le but de l'exercice de T2 et qui n'est qu'une étape intermédiaire dans la résolution de T3), nous ne pouvons affirmer que l'élève adopte réellement la position d'auteur de l'expression. Comme nous l'avons déjà souligné, l'élève ne fait, dans tous les cas, que compléter la démarche de l'auteur, en ce sens où il n'a pas été à l'origine de l'expression, fût-elle décrite en langage naturel (dans T2 et T3) ou encore sous forme d'expression algébrique (dans les autres exercices).

Il nous semble dès lors important de concevoir un exercice qui placerait davantage l'élève en tant qu'auteur d'une expression ; en d'autres mots, il s'agit ici d'envisager une situation dans laquelle l'élève soit davantage « créateur » de l'expression algébrique. A travers cet exercice, nous nous proposons d'apporter des éléments de réponse à la question : l'élève utilise-t-il « spontanément » le langage algébrique pour décrire une situation mathématique donnée ? L'élève, à un niveau scolaire donné, éprouve-t-il le besoin d'utiliser l'algèbre pour modéliser une situation générale ?

La problématique à présent définie[27], analysons de plus près l'exercice en question.

<u>Exercice L – Énoncé</u>

Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2 | tablette 3x2 | tablette 5x3 | et ainsi de suite..

[26] Ceci est d'autant plus flagrant dès lors que le niveau de l'expression est élevé.

[27] Notons que l'exercice comporte plusieurs items, relevant de types de tâches différents. Ainsi, nous ne caractériserons pas cet exercice à travers un seul type de tâche; nous nous référerons plutôt aux dernières questions citées pour souligner le principal objectif de l'exercice. Les différents types de tâches correspondant aux divers items seront toutefois explorés à l'intérieur du paragraphe « commentaires ». Cette observation sera également valable pour les prochains exercices.

<u>Légende</u> : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.
La 1[ère] *tablette est notée* **2x2** *car il y a* ***2 noisettes*** *en longueur et* ***2 noisettes*** *en largeur.*
La 2[nde] *tablette est notée* **3x2** *car il y a* ***3 noisettes*** *en longueur et* **2** *en largeur ; et ainsi de suite…*

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?

Tablette 2x2 : Tablette 3x2 : Tablette 5x3 :

b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ?

c) Et dans une tablette 20x17 ?

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette? Expliquer.

e) Existe-t-il des tablettes contenant 12 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

<u>Commentaires</u>

C'est en nous inspirant des travaux didactiques menés jusqu'à présent, et plus précisément de ceux de Radford (cf. IV.2.3), que nous avons conçu cet exercice. Nous retrouvons effectivement dans l'énoncé l'idée de « patrons » géométriques : une succession de figures construites selon un même modèle, la reconnaissance de celui-ci étant laissée à la charge de l'élève. Le schéma de cet exercice reprend le style adopté par Radford : après avoir présenté une suite de figures géométriques vouée à représenter le modèle de construction, une série de questions reposant sur des cas particuliers du patron sont posées, une sorte de « préparation » à la description du cas général de figure.

Dans notre exercice en particulier, nous commençons par demander à l'élève de trouver le nombre de pépites de chocolat contenues dans chacune des figures déjà représentées dans l'énoncé. Pour y répondre, un simple comptage suffit, la compréhension du modèle générateur de chaque figure n'étant pas nécessaire.

Les deux questions suivantes reposent également sur des exemples précis de figures, celles-ci n'étant cependant pas représentées. Nous avons voulu, à travers ces questions, amener l'élève à considérer l'étude du « cas général », le décourageant progressivement d'une éventuelle représentation graphique, et ceci plus précisément à travers la question (c), où il s'agit d'une tablette 20x17.

Après l'analyse des cas particuliers successifs de figure, l'élève est confronté à l'étude du cas général. Il s'agit, dans la question (d), d'écrire la formule permettant d'obtenir le nombre de pépites dans une tablette quelconque en fonction du nombre de noisettes en longueur et en largeur qu'elle contient. Certes, l'élève est guidé par l'énoncé pour répondre à cette question. En effet, non seulement celui-ci lui suggère la dépendance entre nombre de pépites et nombre de noisettes mais lui montre aussi l'importance de considérer la disposition des noisettes dans une tablette (en largeur et en longueur). Or l'enjeu de l'exercice est, comme nous l'avons précisé plus haut, d'analyser quel usage l'élève fait des lettres (entre autres symboles mathématiques) dans l'écriture d'une expression algébrique. En d'autres mots, d'analyser dans quelle mesure l'élève, placé en tant qu'auteur d'une expression, fait appel aux symboles lettrés pour décrire une formule (ou une instruction –puisque l'énoncé parle plutôt en termes de « description d'un calcul » : « *peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette ?* »).

Finalement, la question (e) a été élaborée pour voir si les élèves, qui auraient trouvé la formule modélisant le cas général de figure, ré-investissent cette information. Si, pour les questions précédentes, le nombre de pépites devait être déterminé en fonction du nombre de noisettes, il s'agit ici de la procédure inverse : trouver le nombre de noisettes en fonction du nombre de pépites (ce qui suffit pour définir une tablette). Nous verrons ultérieurement que le choix du nombre de pépites dans cette question ne peut être livré au hasard.

V.1.3 – L'Art combinatoire

A travers les paragraphes précédents, nous avons voulu mettre en évidence les rapports entre l'expression rhétorique de la visée de l'auteur, l'écriture symbolique et l'expression rhétorique de l'interprétation du lecteur. A en étudier les détails, l'écriture symbolique semble être présentée essentiellement comme étant un « produit fini » fourni par l'auteur ; comme si, reprenant les termes de M. Serfati, elle avait « comme seule vocation de traduire les significations apportées par l'auteur » [Serfati, 1997, p.316].

Or l'écriture symbolique ne peut être réduite à son registre sémantique[28]. L'étude épistémologique des écritures algébriques a révélé un caractère essentiel à la base de l'*invention mathématique* : l' « autonomie » des écritures algébriques.

A l'origine de ce caractère autonome du texte symbolique est une opération qui n'a d'égale dans aucun autre registre : la substitution[29]. Souvenons-nous de l'intérêt que porta Frege, à travers *Sens et Dénotation*, à l'analyse des substitutions de propositions (ou parties de propositions) par d'autres propositions (ou parties de propositions) à même dénotation, à dénotations différentes, de même sens, de sens différents, etc. L'analyse de la substitution d'objets par d'autres objets, commençant par l'étude des conditions à remplir pour rendre possible une telle opération et aboutissant à l'analyse du « résultat final », après transformation, est une question reprise dans divers champs d'études. En didactique, la substitution (symbolique) a fait objet de maintes études, notamment, rappelons-le, sous la plume de Duval (en termes de « traitement »). L'importance de cette « transformation » a été soulignée dans l'analyse épistémologique, M. Serfati y consacre plusieurs

[28] Elle ne peut être caractérisée, dirait M. Serfati, comme « modeste servante du sens » [Serfati, 1997, p. 316].
[29] Pour faire bref, nous emploierons la notion de *substitution* dans son sens large, et ne la distinguerons pas des *métamorphoses* ou *plongements,* cas particuliers de substitutions symboliques. Rappelons que les *métamorphoses* désignent l'exécution successive d'un nombre quelconque de substitutions dans une Forme et que

chapitres de ses travaux, et pour cause ! Nous tenterons de résumer, dans les lignes qui suivent, les caractéristiques mises en exergue par l'étude épistémologique de cette opération, qu'on dirait aujourd'hui banale en mathématiques, apparue avec Leibniz et qui constitue une part de la puissance de la méthode mathématique.

V.1.3.1 - Exercice S1

Introduction épistémologique et problématique

Prenons par exemple[30], l'équation algébrique suivante, et intéressons-nous à la recherche de ses racines multiples:

$4.\,(x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$

Après quelques manipulations algébriques, nous constatons que cette équation, en fait du second degré admet une racine double de valeur $-\frac{1}{2}$.

A présent, appliquons-lui une première substitution, et plus précisément une littéralisation[31]. Aux lieux occupés par le nombre de signe 3, vient s'inscrire la lettre n, signe d'une valeur fixée mais quelconque. Nous nous retrouvons ainsi face à une équation de degré n-1 :

$4.\,(x+1)^n - 4.x^n - 1 = 0$

A travers la littéralisation, non seulement un nouvel objet a été créé (une équation de degré n-1) mais la problématique qui lui était associée a également été modifiée. Sur l'objet d'abord : l'équation obtenue, qui est une forme canonisée de l'équation de départ, se veut une équation dite « indéterminée ». En remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n, non seulement nous obtenons une nouvelle équation, mais toute une famille d'équations. Comme le note Serfati, la substitution, dont la motivation se plaçait initialement purement au niveau combinatoire (remplacer le chiffre 3 par la lettre n, à chaque occurrence), aura transformé un unique individu en toute une espèce, l'équation ainsi obtenue étant une extension de la première (et en sens inverse, l'équation initiale étant un cas particulier de sa transformée, une instantiation). En même temps que l'objet a subi une modification, la problématique initiale a été elle aussi transformée. A présent, nous pouvons reformuler notre questionnement initial comme ceci : peut-on choisir l'entier indéterminé (de signe n) pour que la nouvelle équation admette aussi une racine multiple ?

Toujours dans une perspective d'extension, nous aurions très bien pu, plutôt que littéraliser à la place de l'exposant (en remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n), littéraliser à la place du nombre de signe 1, c'est-à-dire attribuer au lieu du second 1 de l'équation un paramètre de valeur fixée mais indéterminée. Nous obtiendrions alors :

---

les *plongements* (ou *immersions*) sont relatives à l'interprétation des métamorphoses comme transformations d'objets, comme par exemple dans la métamorphose qui fait passer de " $d(x^3)=3x^2.dx$ " à " $d(x^n)=ax^{n-1}dx$ ".

[30] Cet exemple, ainsi que son analyse est discuté avec plus de détails dans [Serfati, 1997].

[31] Terme introduit par M. Serfati dans [Serfati, 1997] pour indiquer la substitution, dans le texte, d'un chiffre par une lettre.

4. $(x+1)^3 - 4.x^3 - a = 0$

Nous avons encore affaire ici à une équation de degré deux, dépendante à présent d'un paramètre de signe *a*. A l'instar de la première substitution, nous pouvons dire que le résultat de celle-ci est une extension de l'originale, de même que l'équation de départ se veut une instantiation numérique de la première (où la valeur de *a* est égale à 1). La question concernant les racines multiples se traduit désormais par : peut-on déterminer les nombres indéterminés de signe *a* pour tels que l'équation admette une racine multiple ?

Finalement, nous appliquerons une dernière substitution à l'équation de départ, la composée des deux substitutions précédentes, une succession de deux littéralisations, au terme desquelles nous obtenons :

4. $(x+1)^n - 4.x^n - a = 0$

Une fois choisie la clé d'interprétation (cf. IV.1.2) associée aux trois différentes lettres[32], la question des racines multiples de cette nouvelle équation de degré *n*-1 peut se traduire par : peut-on déterminer les nombres de signe *a* pour que, l'entier de signe *n* étant donné, l'équation admette une racine multiple ?

A travers ces différents exemples de substitution, nous avons voulu souligner l'importance de cette opération, impossible dans l'univers des énoncés rhétoriques et si commune dans les pratiques mathématiques d'aujourd'hui. En effet, à travers une double littéralisation, l'équation de départ, presque entièrement chiffrée, a acquis un nouveau statut : elle représente une classe d'équations de paramètres *n* et *a*. La question initiale des racines multiples a, en conséquence, aussi été élargie et, comme le souligne Serfati :

> « (...) [elle] trouve alors une réponse non triviale et satisfaisante[33], ce qu'on n'avait pas observé dans les tentatives intermédiaires. La réussite obtenue dans la transformée ultime se subsume en la création d'un problème neuf, intéressant, et qui ne résultait nullement ni de l'examen initial, ni d'une interprétation naturelle de la source. » [ibid., p. 307].

Et, plus loin, il conclut :

> « (...) la transformée (...) montre alors comment la réussite est en fait venue couronner un certain nombre d'essais, au hasard, portant substitution à presque tous les lieux possibles occupés par des chiffres dans *Béta*[34]. Un exemple qui illustre donc l'intérêt de la pratique aveugle des métamorphoses, à l'effet de créer des problèmes neufs à résoudre. » [ibid., p. 308]

---

[32] Contrairement à la « clé » usuelle où *x* est le signe du requis, nous choisirons d'associer à la lettre *a* cette interprétation, *n* étant le signe d'une valeur arbitraire mais fixée.

[33] En effet, l'équation $4.(x+1)^n - 4.x^n - 1 = 0$ n'admet de racines multiples que lorsque n = 3. De la même façon, l'équation $4.(x+1)^3 - 4.x^3 - a = 0$ n'admet de racines multiples que si a = 1. Par contre, l'équation $4.(x+1)^n - 4.x^n - a = 0$ admet des solutions non triviales. *n* étant fixé, on trouve $a_k = \dfrac{(-1)^{k+n-1}\, i^{n-1}}{\left(2\sin\dfrac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}$, pour $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$.

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. Serfati pour plus de détails. Note de l'auteur.

[34] Notation utilisée par M. Serfati qui renvoie à l'équation de départ. Note de l'auteur.

Si cette série de substitutions semble à nos yeux aller de soi, elle n'était pas pratique courante au XVIIe siècle. En effet, l'idée qu'une écriture symbolique puisse être à l'origine de nouvelles constructions mathématiques était quasiment inconcevable avant Leibniz, ses prédécesseurs ayant seulement envisagé une direction unilatérale (du registre des significations vers le symbolique). Leibniz fut le premier à pratiquer cette « nouvelle démarche », procédant à des manipulations symboliques sans y apporter constamment des significations. Cette manipulation « à l'aveugle », une procédure entièrement mise en oeuvre dans le registre symbolique (ce que Leibniz désigna sous le nom d'Art combinatoire), vint donc conférer au texte symbolique une puissante caractéristique : son autonomie. A ce sujet, Serfati observe :

> « Ainsi avait-il [Leibniz] reconnu au texte symbolique cette faculté cruciale de "véhiculer essentiellement des combinaisons d'informations portant sur [sa] propre structure", que souligne G. Granger [35]. Quoi qu'il en soit, agissant de la sorte, Leibniz fut conduit à prendre en compte le registre symbolique en tant que tel, c'est-à-dire pourvu d'une existence certaine *per se* : dès lors, l'autonomisation du texte symbolique et l'élargissement, ainsi compris, de la pratique de l'Art combinatoire, furent à l'évidence, historiquement liés de façon indissoluble. » [ibid., p.375. Italiques dans l'original]

Ainsi avons-nous vu, à travers l'analyse épistémologique, à quel point la procédure de substitution s'est révélée cruciale à l'avancement des mathématiques. Un bon géomètre doit, Leibniz aurait sûrement acquiescé, avoir la faculté de se détacher (tout du moins momentanément) du monde des significations se permettant, dans un premier temps, de produire « automatiquement » des formules sans égard à leur signification et dont la validation éventuelle se ferait, dans un second temps, par l'auteur lui-même ou la communauté scientifique. C'est dans cette perspective de l'Art combinatoire et toute la puissance qu'il révèle[36] que nous avons développé l'exercice suivant, introduisant la dernière section de l'ensemble des tâches proposées.

<u>Exercice S1 – Énoncé</u>

Imaginez-vous dans un monde sans grandes puissances : où les carrés, les cubes, etc. n'existent pas. Un monde où toutes les puissances sont écrites en fonction de la seule puissance existante : celle du premier degré. En d'autres mots, c'est un monde où x existe, mais où x^2, x^3, x^4, etc. n'existent pas. Dans ce monde où x est la référence absolue, on n'a qu'une information : on sait que $x^2 = 2x-2$.

a) Dans ce monde, comment peut-on écrire x^3 ?

b) Complétez le tableau de multiplication suivant :

[35] in *Essai d'une philosophie du style*. Armand Colin. Paris 1968, page 22. Note dans l'original.

	1	***x***	x^2	x^3
1	1	x	$2x$-2	
x				
x^2				
x^3				

c) A l'aide du tableau précédent, pouvez-vous déterminer combien vaut, dans ce monde, la somme : $-x^3 + 2x^2 - 2x$?

d) Dans ce monde, comment peut-on exprimer une puissance quelconque de x ?

Commentaires

Nous voulions traduire, à travers un exercice, l'idée leibnizienne d'Art combinatoire. Certes l'exercice à développer se devait d'évoquer la substitution ; cependant, afin de traduire toute la puissance de cette manipulation (plus précisément en ce qui concerne le « calcul aveugle »), les tâches ne pouvaient être trop « simples », telle la substitution d'un chiffre par une lettre dans une expression algébrique (la littéralisation, qui peut être abordée par des élèves de collège) ou l'application numérique d'une écriture algébrique (l'instantiation, souvent rencontrée en 2^nde^ , à travers des tâches relevant du calcul d'une expression pour une valeur donnée de la variable en jeu).

Il s'agit ici de déborder le seul cadre d'instantiation-extension, dont l'intérêt est au demeurant non négligeable, et de proposer un exercice de substitution où le principe de manipulation quasi aveugle des expressions algébriques est davantage mis en évidence.

Le principe de « substitution à l'aveugle » doit cependant être ici compris avec une certaine nuance. Si les manipulations combinatoires présentées jusqu'alors dans notre analyse épistémologique révélaient en quelque sorte une manipulation « automatisée » (à chaque lieu du nombre de signe 3 venait, par exemple, s'inscrire la lettre *n*), la substitution dans cet exercice n'est pas immédiate. En ce qui concerne notamment la première question (et cela s'étendra aux questions suivantes), le seul examen visuel de l'écriture symbolique (x^3) ne suffit pas pour « annoncer le besoin de substitution ». Une étape intermédiaire de ré-écriture (explicite ou non) s'avère nécessaire : il faut, en effet décomposer x^3 en produit de x par x^2 pour, ensuite seulement, substituer au lieu de x^2 l'expression $2x$-2, aboutissant à l'expression factorisée $x(2x-2)$. Or cette étape n'est pas ultime dans la résolution et le reconnaître est à nos yeux la difficulté majeure de cet exercice. Il s'agit ici en effet de reconnaître x^2 dans l'expression factorisée (c'est-à-dire prévoir son développement : $2x^2-2x$) pour ensuite substituer

[36] Leibniz parle d'ailleurs d' « autarcie ».

au lieu de x^2 l'expression $2x$-2, aboutissant à l'expression finale de x^3 « selon les règles du jeu », *i.e.* $2x$-4.

L'application successive de substitutions n'est pas spécifique à l'expression x^3. En effet, plus les puissances de x seront importantes, plus la résolution de la question demandera des substitutions successives (surtout si l'on ne réinvestit pas les réponses précédentes). A l'origine de cette difficulté en est une autre, à notre sens centrale dans l'exercice : sa résolution exige qu' à tout moment, l'élève ne perde pas de vue l'objet à remplacer, ceci demandant de sa part une capacité à repérer cet objet dans la totalité du texte symbolique, qu'il soit automatiquement visible ou masqué par des manipulations algébriques que l'élève devra alors pré-voir.

Enfin, comme le note Serfati, « Et le résultat de la substitution combinatoire peut parfois paraître stupéfiant à son auteur même, découvrant une propriété à laquelle il n'aurait jamais pensé » [ibid., p. 376]. Quelle surprise l'élève n'aura pas lorsqu'il découvrira que, dans ce monde, x^4 est tout simplement -4 [37]!

V.1.3.2 – Exercice S2

Introduction épistémologique et problématique

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, à travers l'étude de l'équation

$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$,

et plus précisément à travers les successives substitutions qui lui ont été appliquées, la puissance que recèle la substitution à l'aveugle dans un texte symbolique. Nous avons notamment étudié comment la pratique de la littéralisation, inconcevable avant Leibniz, peut non seulement offrir au mathématicien des objets mathématiques neufs mais permet également de créer des problèmes nouveaux, proposant ainsi une perspective tout à fait originale du problème initialement posé.

A l'inverse, cependant, le mathématicien peut vouloir, pour résoudre une question, considérer des cas numériques (et donc particuliers) d'un « canon »[38] général dont il dispose. Ainsi, il fera appel à une substitution particulière, simple, au demeurant importante, rapidement mentionnée dans le paragraphe précédent : la substitution à la lettre d'un chiffre.

Reprenons notre expression de départ :

$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1$

En substituant, par exemple, aux lieux de la lettre x le chiffre –1/2, et après avoir effectué les calculs intermédiaires : $4.((-1/2)+1)^3 - 4.(-1/2)^3-1$,

l'équation initiale est vérifiée :

$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$,

conférant ainsi au chiffre –1/2 un statut particulier : celui de racine réelle d' un polynôme.

[37] On reconnaît ici la construction de l'anneau quotient $IR[x]/x^2-2x+2$.
[38] Terme du XVIIe siècle employé pour désigner une formule.

Cette instantiation n'est certes qu'un exemple particulier parmi celles que l'on peut appliquer à l'expression de départ, dénommée *chiffrage* par M. Serfati. De façon plus générale, les instantiations suivent une procédure analogue à la littéralisation : partout, à chaque lieu occupé par la lettre dans le texte symbolique, s'inscrira la (ou les) forme(s) donnée(s).

Ainsi, nous pouvons envisager l'instantiation de l'équation de départ par une autre lettre, désignant une valeur arbitraire, mais fixée :

$4.\,(a+1)^3 - 4.a^3 - 1 = 0.$

Reprenant les termes de M. Serfati, nous parlerons ici d'instantiation « littérale », c'est-à-dire indéterminée, ce qui nous renvoie à l'examen des différentes clés d'interprétations d'un texte symbolique examinées dans le paragraphe IV.1.2.

Cette instantiation peut évidemment s'étendre à d'autres cas, où l'on substituerait à la lettre x d'autres chiffres, d'autres lettres, ou plus généralement d'autres formes. Nous avons voulu traduire ce volet de la substitution, en mettant cette fois-ci moins l'accent sur l'application « à l'aveugle » de la substitution illustrée par l'exercice S1, à travers la conception de l'exercice suivant, calqué sur un modèle fréquemment rencontré dans les manuels scolaires des classes de 2nde [39].

Exercice S2- Énoncé

On considère la fonction f telle que, pour tout réel x, $f(x)=x^2-x+2$.

a) Que vaut $f(1)$? Et $f(4)$?
b) Déterminer l'image de a par la fonction f, c'est-à-dire déterminer $f(a)$. Déterminer $f(-a)$.
c) Exprimer $f(2x)$, $f(-x)$, $f(x+1)$ et $f(x^2)$.
d) Une fonction g est dite paire si, pour tout x réel, $g(-x)=g(x)$. D'après cette définition, la fonction f est-elle paire ?
e) Une question plus difficile : saurais-tu calculer $f(f(x))$?

Commentaires

Cet exercice nous permet d'étudier la substitution d'un symbole par un (ou plusieurs) autre(s) dans un contexte particulier : le contexte des fonctions.

Sur le plan combinatoire, si la majorité des questions posées se veulent de même nature, *i.e.* la substitution à la lettre x par des chiffres et/ou des lettres et formes, elles possèdent toutes des intérêts et complexités distinctes.

La première question se veut un exemple type de ce qu'on avait dénommé plus haut « chiffrage ». Dans le contexte des fonctions, ceci revient à trouver les valeurs prises par f pour certaines valeurs de x. En l'occurrence, aucune des valeurs proposées n'est racine du polynôme f, ceci aurait cependant pu être envisagé.

[39] En effet, l'exercice suivant a été en partie inspiré d'un exercice proposé dans *Nouveau Pythagore*, 2000, p.71.

La question suivante est en quelque sorte la généralisation de la première. Il s'agit non plus de substituer à la lettre x quelques valeurs numériques particulières, mais *toutes* les valeurs déterminées. Ceci se traduit par la formulation de l'instantiation littérale : au lieu de x, l'on demande (implicitement) à l'élève d'inscrire la valeur d'un nombre quelconque a. Observons qu'ici encore la substitution est entièrement inscrite dans le cadre fonctionnel, la tâche de substitution étant en effet masquée par les termes de « calcul d'image de a par f ».

La troisième question se veut un exemple particulier de substitution (et plus précisément d'instantiation). Si, dans les questions précédentes, la *substituante*[40] de la lettre x a toujours été un signe qui ne figurait pas dans l'expression de départ, il n'en va pas de même ici. Plus particulièrement, ce qui accroît d'ailleurs la complexité de la tâche, la substituante contient elle-même le symbole à remplacer. Ainsi, aux lieux de la lettre x, on demande d'inscrire $2x$, $(x+1)$, etc. Observons que le calcul de $f(-x)$ a été envisagé, bien que celui-ci ait déjà été demandé à la question précédente (à travers la détermination de l'image de $-a$). Cette apparente redondance est volontaire ; nous lui attribuons deux raisons essentielles. La première est intimement liée à la problématique épistémologique que nous venons de décrire : à travers cette question nous avons voulu examiner si les substitutions à la lettre x par les signes $-a$ ou $-x$ sont différemment perçues par les élèves et en particulier s'ils manifestent plus de facilité lorsque la substituante du signe à remplacer n'est pas en partie composée par celui-ci. D'autre part, cette « re-formulation » de $f(-a)$ en termes $f(-x)$ permet d'introduire la question suivante, relative à l'étude de la parité de la fonction f.

Soulignons finalement que la dernière question relève d'une complexité encore plus élevée que la troisième. Il s'agit à nouveau d'une instantiation où la substituante est composée de signes qui figurent dans l'expression de départ ; or cette fois-ci la substituante regroupe *tous* les signes de l'expression : elle *est* l'expression elle-même ! Sur le plan mathématique cette substitution est en fait très particulière : il s'agit de la composition de fonctions –en l'occurrence, une itérée par composition d'une fonction.

V.2 – <u>Le rapport des élèves au symbolisme</u>

Dans la section précédente, nous avons présenté divers exercices voués à illustrer le rapport entre didactique et épistémologie, notamment en ce qui concerne les questions de la substitution, de l'usage des lettres dans la « création » d'une formule et de l'étude des deux démarches d'exploration d'une écriture symbolique. Il est temps à présent d'aborder le second volet de l'expérimentation, annoncé en introduction, qui peut se traduire par les questions suivantes : dans quelle mesure l'étude épistémologique permet-elle de mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme algébrique ? Comment ce rapport évolue-t-il au cours du temps ?

[40] Terme introduit par M. Serfati dans [Serfati, 1997].

Dans la tentative d'apporter quelques éléments de réponse à notre première interrogation, une question intermédiaire semble naturellement émerger : dans quelle mesure les tâches précédemment proposées peuvent-elles nous éclairer quant au rapport des élèves au symbolisme ?

Pour aborder ce multiple questionnement, nous avons envisagé la mise en oeuvre de certains exercices dans des classes réelles, et plus précisément à deux niveaux différents : les mêmes exercices ont à la fois été proposés à des élèves de 4ème, dont l'introduction au symbolisme est très récente, mais aussi à des élèves de 2nde, déjà familiers avec l'écriture symbolique. En effet, nous avons vu, à travers l'analyse *a priori* des tâches proposées, que la plupart des exercices se révèlent bien adaptés aux deux niveaux. De plus, ces deux niveaux scolaires nous paraissent particulièrement appropriés pour l'examen des questions que nous nous posons. L'entrée dans le monde du symbolisme algébrique, qui semble débuter en classe de 5ème, ne commence à acquérir une réelle importance qu'en classe de 4ème, où les élèves sont notamment amenés à résoudre des problèmes de mise en équation (du premier degré à une inconnue) ou encore à effectuer quelques calculs littéraux simples (comme le développement de certaines expressions algébriques)[41]. Il serait alors intéressant d'examiner, à ce stade de l'introduction au symbolisme, les relations qu'entretiennent les élèves avec les écritures algébriques. Une mise en regard des résultats de cette analyse avec celle relative au même questionnement adressé à des élèves de 2nde, pour qui l'étude des écritures algébriques est moins récente et plus systématique[42], semble un bon moyen d'enrichir nos connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme.

Dans la présente section, après avoir décrit la méthodologie employée pour la mise en oeuvre des différentes situations dans chaque classe, nous détaillerons l'analyse des réponses apportées par les élèves.

V.2.1 – Les élèves de 4ème

V.2.1.1 – Méthodologie

Deux exercices parmi ceux proposés dans la section précédente ont été présentés à une classe de 27 élèves de 4ème en région parisienne. Le choix des exercices a été fait en accord avec l'enseignante responsable de cette classe, qui a notamment apporté quelques modifications quant aux énoncés originellement établis.

L'enseignante a choisi d'intégrer les deux exercices à un devoir surveillé d'une heure qu'elle avait au préalable envisagé. Le devoir s'est déroulé le 16 mai 2002 en l'absence du chercheur et aucune consigne particulière n'a été donnée aux élèves (ils ne savaient notamment pas que quelques uns des exercices étaient destinés à une recherche scientifique).

Les photocopies des devoirs ainsi que les brouillons rendus par les élèves et recueillis par l'enseignante nous ont été donnés et ont servi de base pour l'analyse que nous développerons ci-après.

[41] Voir en annexe le programme officiel en mathématiques de la classe de 4ème.
[42] Voir en annexe le programme officiel en mathématiques de la classe de 2nde.

Observons qu'à la demande de l'enseignante, nous n'avons pas assisté à la séance de « correction » du devoir ; les productions écrites sont donc notre seul support d'analyse.

Cependant, afin d'enrichir l'analyse des réponses des élèves de 4ème, nous avons fait passer les deux mêmes exercices auprès d'un élève du même niveau scolaire, inscrit dans un autre établissement de la région parisienne. Celui-ci, contrairement aux élèves de la classe de 4ème, savait qu'il s'agissait d'une recherche scientifique et nous a reçu chez lui pour répondre à nos questions. La séance a été menée par le chercheur et un enregistrement audio a été effectué. Nous inclurons quelques passages de la transcription de la séance à la fin de l'analyse des productions écrites de la classe de 4ème afin de compléter les informations issues de celle-ci[43].

V.2.1.2 – Exercices expérimentés (4ème)

Voici une copie du devoir donné aux élèves de 4ème, tel qu'il leur a été présenté.

Seuls les deux premiers exercices ont fait l'objet de l'entretien individuel précité.

Exercice n°1

Pour les questions 1 à 3, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu.
a et *b* représentent deux nombres non nuls.

Question 1

A= $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$:	☐	n°1 : L'inverse du carré de la somme de *a* et *b*
B= $\frac{1}{a^2+b^2}$:	☐	n°2 : La somme des inverses des carrés de *a* et *b*
C= $\frac{1}{(a+b)^2}$:	☐	n°3 : Le carré de la somme des inverses de *a* et *b*
		n°4 : Autre(s) : ☐

Question 2

A= $\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2$:	☐	n°1 : Le tiers de la somme des carrés de *a* et *b*
B= $\frac{a^2+b^2}{3}$:	☐	n°2 : La somme des carrés des tiers de *a* et *b*

[43] La lettre **E** indiquera l'intervention de l'élève et la lettre **O** celles de l'observateur /chercheur.

C= $\dfrac{(a+b)^2}{3}$:

n°3 : La somme des tiers des carrés de *a* et *b*

D= $\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{b^2}{3}$:

n°4 : Le tiers du carré de la somme de *a* et *b*

n°5:Autre(s) :

Question 3

A= $\dfrac{1}{ab}$:

n°1 : L'opposé de l'inverse du produit de *a* et *b*

B= $\dfrac{1}{-a-b}$:

n°2 : L'inverse du produit des opposés de *a* et *b*

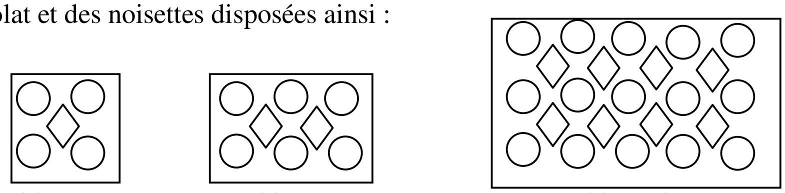
C= $\dfrac{-1}{ab}$:

n°3 : L'opposé du produit des inverses de *a* et *b*

n°4 :Autre(s) :

Exercice n°2

Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2 tablette 3x2 tablette 5x3

et ainsi de suite.….

Légende : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.
*La 1ère tablette est notée **2x2** car il y a **2 noisettes** en longueur et **2 noisettes** en largeur.*
*La 2nde tablette est notée **3x2** car il y a **3 noisettes** en longueur et **2** en largeur ; et ainsi de suite…*

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?
Tablette 2x2 :………. Tablette 3x2 :………. Tablette 5x3 :……………

b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ? ……………..

c) Et dans une tablette 20x17 ?…………

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette? Expliquer (au dos)

e) Existe-t-il des tablettes contenant 7 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

……..

<u>Exercice n°3 :</u> 1°) Calculer la valeur de 3(x -1)+2(x -2) -5x +7 lorsque **x=0 :**

………………………………………………………………………………………………
lorsque **x=1** :

………………………………………………………………………………………………
lorsque **x=2 :**

………………………………………………………………………………………………
2°) Quelle conjecture peut-on formuler ?…………………………………………………….
3°) Développer et réduire l'expression donnée. Conclure :

<u>***Ex. BONUS***</u>
1°) Cas particulier : prendre 2 nombres pairs et les multiplier :………..x……….=……….
Le résultat obtenu est-il multiple de 4 ?……….
2°) Cas général : démontrer, par le calcul littéral, que le produit de 2 nombres pairs est **toujours** un multiple de 4 :

Dans notre analyse, nous avons uniquement retenu les réponses des élèves aux exercices 1 et 2, que nous avions développé et dont les analyses *a priori* sont présentées dans le paragraphe suivant. Nous invitons le lecteur à voir, en annexe, les solutions envisageables aux deux exercices.

V.2.1.3 – Analyse *a priori* des exercices (4ème)

Nous avons procédé, dans les sections précédentes (cf. V.1.1.5 et V.1.2), à l'examen de la problématique épistémologique sous-jacente aux exercices 1 et 2 proposés aux élèves de 4ème, en justifiant le choix des énoncés et en analysant leurs limites. Cependant, cette analyse, de nature plutôt théorique, s'est faite indépendamment des éventuelles réponses données par les élèves et de leurs stratégies possibles. A travers le présent paragraphe, nous nous proposons de compléter l'étude précédente à partir d'une analyse *a priori* des réponses possibles d'élèves, qui devrait servir de base à l'examen des productions recueillies. Nous veillerons alors à mettre en évidence les stratégies qui nous semblent pouvoir être adoptées par les élèves (surtout en ce qui concerne l'exercice 1), ce qui nous conduira notamment, dans un second temps, à considérer les limitations pratiques des énoncés.

Exercice 1

L'analyse *a priori* de cet exercice est essentiellement sous-tendue par deux hypothèses relatives aux démarches susceptibles d'être adoptées par les élèves. Nous verrons que ces hypothèses, argumentées par la suite, seront en grande partie déterminantes dans la méthode employée pour analyser les réponses possibles des élèves.

Notons tout d'abord qu'il s'agit, dans cet exercice, de faire correspondre, à chaque expression algébrique de la colonne de gauche, la phrase en français la décrivant. Pour ce faire, plusieurs stratégies sont envisageables ; trois d'entre elles seront examinées.

L'élève peut tout d'abord –et c'est cette stratégie que nous supposons être majoritairement adoptée- analyser chaque expression algébrique, au cas par cas. Ainsi, l'élève choisit une expression mathématique parmi celles proposées dans la colonne de gauche et analyse toutes les phrases en français présentées dans la colonne de droite jusqu'à choisir celle qui lui semble la traduire (ou, le cas échéant, écrit de lui-même une phrase dans le rectangle libellé « Autre(s) »). Ensuite, l'élève choisit une autre expression algébrique et parcourt toutes les phrases en français restantes. *Et ita porro*, jusqu'à avoir traité toutes les expressions algébriques.

L'élève peut également, à l'inverse, « fixer » une phrase en français et inventorier toutes les expressions algébriques proposées. Après avoir parcouru toutes les expressions -et ceci indépendamment du résultat (i.e. avoir trouvé ou non l'expression algébrique correspondante à la phrase choisie)- l'élève passe à une autre expression en français, en adoptant le même procédé. Et ainsi de suite, jusqu'à avoir traité toutes les phrases en français. Si, au terme de cet examen, l'élève a pu trouver, à chaque phrase en français proposée dans la colonne de droite, l'expression qui lui correspond dans la colonne de gauche, il peut considérer avoir résolu l'exercice. En revanche, si (au moins) une expression en français ne présente pas de correspondance algébrique, cela signifie non seulement qu'aucune expression de la colonne de gauche ne lui correspond mais aussi qu'il existe (au moins) une expression algébrique pour laquelle il faut écrire la phrase en français la traduisant[44]. Ainsi, la dernière étape de la démarche de l'élève consistera à écrire, dans le rectangle libellé « Autre(s) », les phrases traduisant les expressions pour lesquelles aucune phrase ne leur avait été associée.

Finalement, l'élève peut adopter une démarche qui se veut une combinaison des précédentes. Il peut, par exemple, commencer par choisir une expression algébrique et parcourir les expressions en français à la recherche de celle qui la traduit. Si la première phrase examinée ne correspond pas à l'expression algébrique en question, l'élève interrompt momentanément sa quête et s'intéresse à la recherche de l'expression algébrique correspondante à cette phrase, pour ensuite seulement revenir au problème initial, en poursuivant l'examen des phrases en français susceptibles de traduire la première expression algébrique qu'il avait choisie. Cette démarche peut bien évidemment se faire en sens inverse, en commençant par l'analyse d'une phrase écrite en français. En tous les cas, l'élève procèdera par des allers-retours entre phrases en français et expressions algébriques, ne privilégiant pas nécessairement une unique direction d'analyse (du français vers le symbolique, par exemple).

Nommons, pour des raisons de clarté d'énoncé, démarche 1, démarche 2 et démarche 3, respectivement, les trois démarches examinées.

En reprenant les termes utilisés dans l'analyse épistémologique, nous pouvons traduire la démarche 1 comme suit. L'élève, dans ce cas, fait tout d'abord face à une expression algébrique et se place donc en tant que *lecteur* de l'expression. Or, dès lors qu'il doit examiner toutes les propositions en français (qui traduisent la démarche synthétique propre à l'auteur -virtuel- de l'expression) pour trouver celle qui lui correspond, l'élève doit changer de point de vue, en s'imaginant *auteur* de l'expression, devant alors traduire (au moins implicitement et partiellement) en français l'expression algébrique initialement choisie[45]. Ainsi, dirons-nous que l'élève qui adopte la démarche 1 procède, pour chaque expression algébrique, à une démarche allant de l'analytique vers le synthétique.

La démarche 2 se fait, nous avons vu, en sens inverse à la démarche 1 et se base sur une position initiale synthétique de l'élève. Celui-ci doit, en effet, d'abord reconstruire (au moins implicitement et partiellement) l'expression algébrique relative à la phrase en français à laquelle il fait face, afin de la comparer à celles qui lui sont proposées dans la colonne de gauche du problème. Cette démarche, du synthétique vers l'analytique, est réitérée à chaque nouvelle expression en français analysée. Cependant, nous avons vu que cette démarche « unilatérale » ne suffit pas pour résoudre l'exercice. Dans le cas où une expression en français ne trouve pas son « équivalence algébrique », cela implique aussi qu'il existe une expression symbolique dont la traduction en français n'est pas proposée. Ainsi, l'élève doit changer de démarche et, partant de la position de *lecteur* de l'expression algébrique, doit s'imaginer *auteur* de l'expression afin de produire lui-même la phrase qui lui correspond.

Finalement, la démarche 3 traduit un constant va-et-vient entre analyse et synthèse. Observons que, bien que ce double positionnement auteur-lecteur figure déjà dans les deux autres démarches (comme nous l'avions souligné lors des analyses épistémologiques), il est ici non seulement plus explicite mais relève presque d'un caractère méthodologique.

Après cette description détaillée, au demeurant non exhaustive, des différentes stratégies possiblement adoptées par les élèves, venons-en à nos hypothèses.

En ce qui concerne la démarche adoptée par les élèves, nous supposons que celle que nous avons intitulée démarche 1 sera privilégiée au détriment des deux autres. L'énoncé de l'exercice semble en effet induire les élèves à adopter un telle stratégie : « associer à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit ». De plus, les expressions algébriques sont proposées dans la

[44] Cet exercice, tel que nous l'avons proposé, présente autant d'expressions algébriques que de phrases en français.

[45] Faute de quoi l'élève ne pourrait choisir une phrase parmi celles qui lui sont proposées.

colonne de gauche de l'énoncé. Supposant une habitude de lecture de gauche à droite, il nous parait vraisemblable que les élèves partiront de l'examen des expressions algébriques vers l'analyse des phrases en français.

A l'intérieur même de cette démarche, à présent, nous pouvons supposer -ceci constituant la seconde hypothèse que nous avons annoncée plus haut- que l'élève procèdera à une lecture ordonnée des expressions algébriques. Il commencera alors par examiner l'expression A, puis la B, puis la C (puis D, quand il y a lieu), avec d'éventuels retours en arrière[46].

En résumé, nous supposons que l'élève procèdera à une lecture ordonnée des expressions algébriques proposées, adoptant une démarche partant de l'analyse vers la synthèse.

Ces hypothèses vont, comme nous l'avions annoncé, être déterminantes sur la façon dont nous mènerons l'analyse *a priori*. En effet, nous observons que les réflexions tenues ci-dessus confèrent à la première expression algébrique de chaque question un statut très particulier. Celle-ci va, de fait, jouer un rôle de « pivot inférentiel » dans notre analyse ; la réponse donnée à cette expression venant non seulement nous renseigner localement quant à la faculté de l'élève à traduire celle-ci en langage naturel mais se révélera surtout, nous le verrons, un véritable support dont nous nous servirons pour parfaire l'examen des réponses données aux autres questions. En d'autres mots, nous pouvons dire que pour chacune des trois questions de cet exercice, l'expression A servira de « test de base » et se révèlera non seulement un point de départ à notre analyse mais aussi un point de référence pour établir des liens entre les réponses apportées aux autres différents items de chaque question.

Question 1

- Expression A

L'élève qui choisit la phrase 2 pour traduire cette expression (et donc répond correctement) montre avoir reconnu (au moins) l'assembleur de plus haut niveau (la somme). En revanche, nous ne pouvons pas émettre d'hypothèse quant à la reconnaissance des assembleurs de niveau un et deux, dès lors que la phrase 2, qui correspond à la traduction de l'expression A, est la seule où figure cet assembleur de plus haut niveau en tête de phrase.

Tout élève n'ayant pas choisi la phrase 2 et n'ayant pas écrit de lui-même (réponse 4) une phrase commençant par « la somme de… »[47] n'aura donc pas reconnu l'assembleur de plus haut niveau. Selon qu'il aura choisi la phrase 1 ou 3, il aura privilégié les assembleurs de niveau deux ou trois, respectivement. Cependant, bien que toutes deux erronées, ces deux dernières réponses ne peuvent être considérées sur un même plan. Tandis que l'élève qui associe la phrase 1 à cette

[46] L'expérience semble cependant montrer qu'il est rare qu'un élève, au terme de la résolution d'un exercice (ou d'une partie de celui-ci), adopte une position critique en examinant la cohérence de ses réponses. Ainsi, nous estimons que la démarche majoritairement adoptée sera l'examen séquentiel des expressions A, B, C et D (lorsqu'il y a lieu).

[47] Dans ce cas, nous nous attendons donc à ce que l'élève écrive « la somme des carrés des inverses de *a* et *b* », seule autre possibilité de phrase commençant par « la somme ».

expression semble privilégier une lecture linéaire de l'expression (de gauche à droite), « mettant à plat » les différents niveaux des assembleurs en jeu et n'adoptant pas la position d'auteur de l'expression[48], nous pouvons difficilement émettre une hypothèse quant à la démarche d'un élève qui associe la phrase 3 à cette expression[49].

- <u>Expression B</u>

Supposons, dans un premier temps, que l'élève ait choisi la phrase 2 pour l'expression A. Il lui reste donc le choix, pour l'expression B, entre les réponses 1, 3 ou celles de type 4 (cette dernière devant être explicitée par l'élève).

S'il choisit la phrase 1 pour la décrire, l'élève montrera avoir reconnu, comme pour l'expression A, l'assembleur de plus haut niveau (la division); cependant, il aura inversé l'ordre entre la somme et le carré de *a* et *b*. Nous pouvons émettre l'hypothèse qu'un tel élève se contente de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, privilégiant les phrases déjà fournies par l'énoncé. Ainsi, sa réponse à l'expression précédente doit être analysée avec une certaine précaution : bien qu'elle corresponde à l'association attendue, elle nous renseigne essentiellement sur la faculté de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, et non pas sur celle de la traduire entièrement (si tel était le cas, l'élève aurait probablement écrit de lui-même la phrase attendue pour l'expression B, ne se laissant pas influencer par la phrase 1).

L'élève qui choisit la phrase 3 pour décrire l'expression B non seulement ne reconnaît pas l'assembleur de plus haut niveau, mais choisit la phrase où l'ordre des opérations est entièrement inversé, correspondant à la démarche (théorique) du lecteur d'une expression, qui commence par reconnaître les assembleurs de plus bas niveau, les plus internes. A notre avis, un élève ayant associé à l'expression A la phrase 2 (et donc ayant reconnu l'assembleur de plus haut niveau) aura difficilement une telle démarche.

Finalement, l'élève peut choisir la réponse de type 4 pour cette expression. Dans ce cas, nous nous attendons à ce que la phrase produite soit la phrase attendue, dès lors que l'élève aura montré, à travers sa réponse précédente, son aptitude à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau et dès lors que la phrase 1, qui commence également par la description de l'assembleur de plus haut niveau (la division), est la seule possibilité restante.

En résumé, nous pouvons dire que la réponse apportée à l'expression B nous permettra d'affiner notre analyse concernant la lecture de l'expression A. Nous serons en effet davantage en mesure de savoir si les réponses de l'élève sont uniquement basées sur la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau ou si, au contraire, elles indiquent une lecture complète de la phrase en français.

[48] Ni de *lecteur*, au sens épistémologique du terme.
[49] Ainsi, étant donné que ce dernier cas de figure nous renseigne peu sur la démarche adoptée par l'élève, nous ne le prendrons pas en compte dans la suite de notre analyse.

Considérons à présent le cas où l'élève choisit la réponse 1 à l'expression A, c'est-à-dire le cas où l'élève effectue une lecture « linéaire » de l'expression algébrique. Nous nous attendons, à ce qu'un tel comportement soit également appliqué aux expressions suivantes et en particulier à l'expression B. Or il est plus difficile, de par le « graphisme » de celle-ci, non seulement d'envisager une lecture de gauche à droite, mais de définir cette dernière. Nous pouvons toutefois envisager une traduction se rapprochant au mieux de cette lecture: « l'inverse du carré de la somme de *a* et *b* »[50], en tout point pareille à la réponse 1. Ainsi, compte tenu des réponses apportées à l'expression précédente, il nous est difficile de prévoir la réponse de l'élève à celle-ci.

A travers ce dernier examen nous voyons donc que toute réponse différente de la réponse 2 à l'expression A nous conduit à des hypothèses qui se trouvent être moins fertiles, ce pourquoi nous ne retiendrons dorénavant que le choix de la réponse 2 à l'expression A dans la suite de notre analyse *a priori*.

- <u>Expression C</u>

Nous nous plaçons donc dans le cas où l'élève a choisi la phrase 2 pour l'expression A. Nous pouvons supposer, d'après les analyses précédentes, qu'il n'aura pas choisi la phrase 3 pour l'expression B. Deux cas de figure se présentent : soit l'élève a associé la phrase 1 à l'expression B, soit il a choisi la phrase 4 et a écrit lui-même la phrase qui la traduit[51].

Dans le premier cas, l'élève aura donc choisi la phrase 2 pour A et 1 pour B. La phrase qui traduit l'expression C aura donc déjà été choisie (phrase 1). Il lui reste alors la phrase 3 ou la réponse de type 4 pour l'expression C. Si l'élève choisit la phrase 3, non seulement il ne reconnaît pas l'assembleur de plus haut niveau (la division) mais choisit la phrase où l'ordre des opérations est entièrement inversé, correspondant à la démarche (théorique) du lecteur d'une expression. A nouveau, il nous semble que ce cas de figure se présentera rarement, dès lors que l'élève aura montré, à travers sa réponse aux deux expressions précédentes, avoir reconnu l'assembleur de plus haut niveau. En revanche, si l'élève choisit le mode 4 de réponse, nous nous attendons à ce qu'il écrive une phrase commençant par « l'inverse… » et qui sera probablement « l'inverse de la somme du carré de *a* et *b* », puisque « l'inverse du carré de la somme de *a* et *b* » aura déjà été choisie.

Dans le second cas, l'élève aura choisi la phrase 2 pour A et 4 pour B, c'est-à-dire, aura associé correctement expressions mathématiques et phrases en français[52]. Il aura le choix entre les phrases 1 et 3 pour l'expression C. Encore une fois, compte tenu que la phrase 3 présente l'ordre des assembleurs entièrement inversé, nous nous attendons à ce que l'élève dans ce cas de figure associe la phrase 1 (et donc réponde correctement) à l'expression C.

---

[50] Nous supposons qu'une lecture de gauche à droite implique une lecture de haut en bas. Ceci était implicite dans notre analyse précédente. En effet, attribuer à la lecture linéaire de l'expression A la phrase « l'inverse du carré de la somme de *a* et *b* » plutôt que « le carré de l'inverse de la somme de *a* et *b* » montre bien que nous privilégions la lecture de haut en bas au détriment d'une lecture de bas en haut.

[51] Il peut également revenir sur ses choix antérieurs. Comme nous l'avions déjà souligné, cette attitude sera, à notre avis, minoritairement adoptée.

[52] Si l'on suppose que la phrase que l'élève aura écrite est correcte.

Conclusion

A partir de l'analyse menée précédemment, il nous semble que la majorité des réponses des élèves se classeront selon deux catégories, toutes deux relatives au cas où l'élève reconnaît l'assembleur de plus haut niveau[53].

La première catégorie traduit le profil d'un élève ayant répondu correctement à toutes les questions. C'est la catégorie 2-4-1, où la réponse 4 est la phrase attendue.

La deuxième catégorie de réponses correspond à succession de réponses 2-1-4 aux questions A-B-C, la phrase 4 étant cette fois-ci la phrase : « l'inverse de la somme du carré de a et b ».

Question 2

- Expression A

A l'inverse de la question précédente, l'énoncé de celle-ci propose, pour l'expression A, deux phrases où l'assembleur de plus haut niveau figure en premier plan[54]. Ainsi, la réponse apportée par l'élève à cette expression sera, à nos yeux, davantage révélatrice quant à la reconnaissance des niveaux des assembleurs de l'expression en question: l'élève qui associe à l'expression A la phrase 2 semble indiquer avoir reconnu tous les assembleurs de l'expression, tandis que l'élève qui choisit la réponse 3 montre uniquement avoir reconnu l'assembleur de plus haut niveau.

L'élève qui n'aura pas reconnu l'assembleur de plus haut niveau sera celui qui aura choisi la réponse 1, 4 ou 5 (cette dernière devant être explicitée par l'élève).

Les réponses 1 et 4, bien que toutes deux erronées, fourniront des informations distinctes quant à la démarche de déchiffrement d'une expression algébrique. L'élève qui associe à l'expression A la réponse 4 non seulement ne reconnaît pas l'assembleur de plus haut niveau (la somme) mais semble adopter la position de *lecteur* de l'expression, dont la traduction présente les assembleurs dans un ordre croissant. De plus, cette traduction coïncidant avec une lecture linéaire de l'expression, une attention particulière devra alors être portée à un tel choix. D'un autre côté, si l'élève associe la phrase 1 à cette première expression, peu d'inférences peuvent être faites. Nous pouvons supposer, par exemple, qu'un tel choix repose sur un examen purement visuel, l'expression A et la phrase 1 étant directement en regard dans l'énoncé[55].

[53] Nous avons vu que peu d'inférences pouvaient être faites dans le cas où l'élève ne reconnaît pas l'assembleur de plus haut niveau. De ce fait, aucune catégorie traduisant ce profil n'a été créée.

[54] Ce sont, d'ailleurs, les deux seules phrases possibles remplissant ces conditions.

[55] Nous pouvons imaginer que l'élève procèdera alors ainsi tout au long de l'exercice, associant à chaque expression la phrase qui lui est directement opposée. Nous ne reviendrons par sur cette hypothèse dans la suite de notre analyse.

Finalement, nous devons envisager la possibilité que l'élève choisisse d'écrire lui-même une phrase qui lui semble mieux traduire l'expression A en associant, dans ce cas, la réponse 5. Considérant le fait que les réponses proposées dans l'énoncé représentent toutes les possibilités de phrases commençant par les assembleurs de niveau un et trois, nous pensons que les élèves choisissant la réponse 5 écriront une phrase commençant par « le carré... » (assembleur de niveau deux). Si tel est le cas, nous pouvons penser que cela indique une propension de l'élève à lire l'expression de gauche à droite et donc nous nous attendons à l'écriture de la phrase : « le carré du tiers de la somme de *a* et *b* ».

- Expression B

Supposons, dans un premier temps, que l'élève ait associé à l'expression A la phrase 2. Il aura donc le choix entre les réponses 1, 3, 4 ou la réponse de type 5 (l'élève devant, dans ce cas, expliciter celle-ci).

Les réponses 1 et 4 commencent toutes deux par la description de l'assembleur de plus haut niveau (la division) et diffèrent quant à l'ordre des assembleurs de niveau un et deux.

Comme nous l'avions déjà souligné, l'élève ayant répondu 2 pour l'expression A, non seulement semble reconnaître l'assembleur de plus haut niveau mais indique avoir adopté la position d'*auteur* de l'expression, montrant avoir reconnu tous les niveaux des assembleurs de celle-ci. Ainsi, nous nous attendons à ce qu'il choisisse la réponse 1 (au détriment de la réponse 4) pour l'expression B, où non seulement l'assembleur de plus haut niveau figure en tête de phrase mais où apparaissent, en ordre décroissant, tous les assembleurs de l'expression. Cependant, si l'élève associe la phrase 4 à l'expression B, nous devrons reconsidérer nos hypothèses relatives à sa démarche de lecture d'une expression algébrique (basées, jusqu'ici, sur sa réponse apportée à l'expression A). Nous pourrons alors émettre l'hypothèse que l'élève, bien qu'ayant apporté la réponse attendue à l'expression A, semble reconnaître uniquement l'assembleur de plus haut niveau d'une expression[56].

L'élève qui associe la phrase 3 à l'expression B ne reconnaît pas, de façon évidente, l'assembleur de plus haut niveau, étant donné qu'il refuse de choisir toute phrase (fournie par l'énoncé) commençant par « le tiers ... ». Il nous semble peu probable qu'un élève ayant montré, à travers sa réponse précédente, la faculté à reconnaître l'assembleur structurant l'expression algébrique, effectue un tel choix et si tel est néanmoins le cas, peu d'hypothèses peuvent être émises quant à sa démarche de déchiffrement d'une expression algébrique.

Finalement, si l'élève associe la réponse de type 5 à l'expression B, nous nous attendons à ce qu'il écrive une phrase commençant par l'assembleur de plus haut niveau. Or toutes les possibilités étant fournies dans l'énoncé, nous imaginons qu'un élève dans ce cas de figure écrive une paraphrase, comme, par exemple, « le tiers de a au carré plus b au carré ».

Supposons, à présent, que l'élève ait choisi la réponse 3 à l'expression A, révélant de sa part une faculté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau. Nous nous attendons dans ce cas à ce que

[56] Dans ce cas, nous pouvons supposer, par exemple, que le choix de l'élève relatif à l' expression A repose sur un examen essentiellement visuel, la réponse 2 précédant la réponse 3 dans l'énoncé.

l'élève associe à l'expression B les phrases 1 ou 4. Choisir la réponse 4 au détriment de la réponse 1 nous permettra alors de compléter les hypothèses faites précédemment : plutôt que dire que l'élève reconnaît *au moins* l'assembleur de plus haut niveau (suite à l'examen de sa réponse apportée à l'expression A), nous dirons qu'il reconnaît *uniquement* l'assembleur de plus haut niveau. Si l'élève, d'un autre côté, associe la phrase 1 (attendue) à l'expression B, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'il reconnaît *au moins* l'assembleur structurant d'une expression algébrique. L'examen des réponses apportées aux expressions suivantes (et surtout à l'expression D) seront alors déterminantes pour approfondir l'analyse de sa démarche.

Les deux derniers cas qui nous restent à analyser sont ceux où l'élève aurait choisi la réponse 4 ou celle de type 5 pour l'expression A. Dans le premier cas, nous avons vu que l'élève semblait adopter une lecture linéaire de l'expression. La réflexion qui suit se veut alors très proche du cas analogue étudié pour la question 1. L'expression B, pour laquelle il est plus difficile de parler de « gauche » et « droite », se voudrait alors associée à la phrase « le carré de la somme du tiers de *a* et *b* » qui, dans ce cas, devrait être écrite par l'élève est libellée « autre(s) ». Si l'élève choisit, finalement, la réponse de type 5 pour l'expression A, peu d'inférences peuvent être faites étant donné qu'elles dépendront essentiellement de la phrase produite par l'élève[57].

- <u>Expression C</u>

Supposons que l'élève ait choisit la phrase 2 pour décrire l'expression A. Nous retiendrons, pour la suite de notre analyse, les deux cas qui, issus de l'examen établit précédemment, se sont révélés comme étant les plus pertinents et plus probables : le cas où l'élève associe la phrase 1 à l'expression B et celui où il choisit la phrase 4.

Dans les deux cas, l'élève aura reconnu, pour chaque expression algébrique, l'assembleur de plus haut niveau. Nous nous attendons donc à ce que l'élève choisisse la phrase commençant par l'assembleur de plus haut niveau (la division). Selon que l'élève aura associé la réponse 1 ou la réponse 4 à l'expression B, nous pouvons supposer qu'il choisira la réponse 4 ou la réponse 1, respectivement, pour l'expression C.

Supposons à présent que l'élève n'ait pas choisi la phrase 2 pour l'expression A, mais qu'il soit capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau d'une expression. Il aura donc, d'après nos analyses faites précédemment, choisit la réponse 3 pour l'expression A et les réponses 1 ou 4 pour l'expression B. A nouveau, selon qu'il ait choisi la phrase 1 ou 4 pour l'expression B il choisira, respectivement, les réponses 4 et 1 pour l'expression C. Le deuxième cas de figure (notons-le 3-4-1, en référence à la succession des réponses apportées aux expressions A-B-C) ne fera que confirmer nos analyses précédentes : l'élève avec un tel profil reconnaît *uniquement* l'assembleur de plus haut niveau. Cependant la deuxième possibilité (3-1-4) est insuffisante pour approfondir nos hypothèses

[57] Nous n'approfondirons pas notre analyse *a priori* sur une telle réponse, à nos yeux marginale. Elle demanderait de notre part un trop grand nombre de suppositions quant aux motivations sous-jacentes des élèves.

quant à la démarche adoptée par un élève dans cette situation ; on continuera alors de dire qu'il reconnaît *au moins* l'assembleur de plus haut niveau.

Finalement, considérons le cas où l'élève a choisi la réponse 4 pour traduire l'expression A. L'examen de ce choix nous a conduit, nous l'avons vu, à supposer que l'élève effectue une lecture « linéaire » de l'expression algébrique proposée. Similairement à la réflexion menée pour l'expression B, il nous est difficile d'envisager une réponse à l'expression C qui soit cohérente avec une telle démarche, compte tenu que le « graphique » de l'expression C ne présente pas, de façon évidente, de pôles « droit » et « gauche ». Cependant, la phrase qui semble le mieux traduire une lecture de gauche à droite de l'expression C est «la somme des carrés du tiers de *a* et *b* ». Il serait donc possible que l'élève choisisse, dans ce cas, la réponse 2 pour l'expression C.

- <u>Expression D</u>

D'après les analyses précédentes, nous pouvons regrouper les différentes réponses d'élèves en trois cas de figure (essentiellement liées aux trois possibilités de réponse apportées à la première expression algébrique).

Le premier, sous-divisé en deux catégories, traduit le cas où l'élève choisit la réponse 2 pour l'expression A (entraînant ainsi deux possibilités : la réponse 1 pour l'expression B et 4 pour l'expression C ou vice-versa). Dans les deux cas de figure, qui montrent de la part de l'élève une faculté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, nous supposons que l'élève choisira la réponse 3 pour l'expression D, celle-ci étant, de plus, la seule possibilité restante parmi les réponses fournies par l'énoncé. Dans le cas 2-1-4, nous pouvons conclure que l'élève effectue une bonne lecture des expressions algébriques et montre être capable de surmonter l'habitude d'une lecture linéaire en adoptant une démarche d'auteur de l'expression (c'est en effet la succession de réponses attendue). Dans le cas 2-4-1, à l'inverse, le choix 3 pour l'expression D n'est pas révélateur d'une bonne maîtrise par l'élève du symbolisme, celui-ci n'ayant pas, en effet, associé correctement les expressions B et C à leur phrases en français. Comme nous l'avions déjà souligné, un élève avec un tel profil semble reconnaître uniquement les assembleurs de plus haut niveau.

Examinons, à présent, le second cas, également sous-divisé en deux catégories, où l'élève associe la phrase 3 à l'expression A (impliquant une réponse 1 pour l'expression B et la réponse 4 pour l'expression C ou vice-versa). L'analyse de ces deux cas est analogue à celle des deux précédents : tous deux révèlent, en effet, la capacité de l'élève à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau. Dans les deux cas, l'élève choisira donc la réponse 2 à la dernière expression, mais l'ensemble de ses réponses nous mène à des conclusions distinctes.

Analysons tout d'abord le cas évoqué plus haut : celui où l'élève répond correctement pour l'expression B (et donc correctement pour l'expression C), mais où il commence par associer incorrectement la phrase en français correspondante à l'expression A (c'est le cas 3-1-4-2). L'ordre dans lequel sont proposées les expressions algébriques et l'ordre dans lequel sont énoncées les phrases en français nous laisse croire que les choix de l'élève ne relèvent pas d'un caractère aléatoire. L'élève certes reconnaît l'assembleur de plus haut niveau d'une expression mais sa faculté à déchiffrer correctement une expression algébrique dépendra de la complexité de celle-ci. Observons que ce cas se veut similaire au cas 2-4-1-3 (tous deux présentent deux réponses correctes et deux incorrectes), cependant nous ne nous attendons pas à un même nombre de réponses effectives pour les deux catégories. De part notre expérience dans l'enseignement, il nous semble que la confusion entre $\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2$ et $\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}$ soit plus fréquente que celle entre les expressions B et C[58]. Ainsi, nous nous attendons davantage d'élèves ayant le profil 3-1-4-2 que le profil 2-4-1-3. L'élève qui se situe dans la catégorie 3-1-4-2 est donc un élève qui semble avoir une maîtrise encore incertaine du symbolisme très dépendante de la complexité des expressions en jeu.

Avant d'amorcer l'étude de l'ultime cas de figure retenu pour l'analyse de l'expression D, examinons à présent la deuxième « sous-catégorie » du second cas annoncé plus haut, définie par la succession de réponses : 3-4-1-2. Nous pouvons supposer que, dans ce cas, l'élève montre être *uniquement* capable de reconnaître l'assembleur structurant d'une expression algébrique, en associant de façon erronée à deux expressions[59] les phrases en langage naturel qui leur correspondent.

Finalement, la dernière des trois possibilités à prendre en compte dans cette analyse *a priori* est celle où l'élève ne reconnaît pas l'assembleur de plus haut niveau d'une expression. D'après les analyses menées précédemment, il nous a semblé important de retenir le cas où l'élève choisit la réponse 4 à l'expression A (ce qui impliquait, nous l'avons vu, la réponse de type 5 pour l'expression B et la réponse 2 pour l'expression C). Plus précisément, rappelons-le, nous émettons l'hypothèse selon laquelle l'élève effectue une lecture de gauche à droite de l'expression, une démarche que nous avons nommée *linéaire*. Dans ce cas, nous nous attendons à ce que l'élève produise la phrase suivante (sous le libellé « Autre(s) ») : « le carré du tiers de la somme de a et b ». Soulignons cependant qu'une telle possibilité, bien que cohérente, nous semble marginale et difficilement adoptée par les élèves (qui auraient, dans ce cas, à écrire à deux reprises une phrase en français).

Conclusion

D'après notre analyse *a priori*, six différents cas de figure semblent se dessiner, selon que l'élève montre être capable ou non de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau d'une expression.

Dans le cas où l'élève reconnaît l'assembleur de plus haut niveau, quatre catégories peuvent être définies :

[58] L'analyse *a posteriori* devra venir confirmer ou infirmer cette hypothèse.
[59] Nous pensons que, l'élève étant capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau d'une expression, les réponses aux expressions C et D sont entièrement déterminées par celles relatives aux expressions A et B. Ainsi, il nous semble que l'élève n'ait réellement que deux choix à faire.

La première catégorie correspond à la succession 2-1-4-3. L'élève avec ce profil aura montré posséder une parfaite faculté à associer les expressions algébriques proposées à leurs traductions rhétoriques.

La deuxième catégorie correspond aux réponses 3-1-4-2. Ici, l'élève n'a certes pas associé correctement toutes les expressions algébriques aux phrases proposées, cependant indique sa faculté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau des expressions.

L'élève qui présente le troisième profil (2-4-1-3), bien qu'il a, lui aussi, répondu correctement à la moitié des items proposés se place, comme nous l'avons souligné dans notre analyse, à un stade de simple reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau des expressions algébriques proposées. D'après ses réponses, on dira qu'il reconnaît *au moins* les assembleurs structurants des expressions algébriques proposées.

Finalement, on peut envisager une dernière catégorie de réponses d'élèves, traduisant de la part de ceux-ci une plus faible capacité à trouver aux différentes expressions algébriques proposées leurs correspondants exprimés en langage naturel. Il s'agit de la catégorie 3-4-1-2, qui indiquerait de la part des élèves une faculté à reconnaître *uniquement* les assembleurs de plus haut niveau.

Comme nous l'avons souligné lors de notre analyse, les deux catégories traduisant les profils d'élèves n'ayant pas reconnu l'assembleur structurant des différentes expressions, seront, à notre avis, minoritaires parmi les réponses recueillies. Il s'agit de la catégorie 4-5-2-5, correspondant à une démarche de lecture « linéaire » des expressions et la catégorie 1-2-3-4, correspondant aux élèves associant, à chaque expression algébrique, la phrase en français directement en regard.

Question 3

Avant d'amorcer l'analyse *in fine* des stratégies possiblement adoptées par les élèves et des hypothèses que celles-ci permettent d'inférer, passons à quelques observations générales.

Il est tout d'abord important de souligner que si dans la question 1, l'écriture d'une seule phrase en français était laissée à la charge de l'élève et qu'aucune n'était attendue dans la question 2, l'élève doit, pour répondre correctement à cette question, écrire de lui-même deux phrases dans le rectangle libellé « Autre(s) ».

Il s'agit ensuite d'observer que, bien que les expressions en jeu dans cette question soient, comme celles intervenant dans les questions précédentes, au maximum de niveau trois, elles présentent des complexités différant de celles étudiées jusqu'alors.

Nous veillerons donc à mettre en exergue, tout au long de notre analyse, de telles différences, qui se veulent aussi bien relatives à la mise en forme de l'énoncé qu'à la nature des expressions algébriques en jeu.

- Expression A

Nous avons voulu, rappelons-le, à travers la mise en place de ce premier exercice, examiner dans quelle mesure le passage d'une démarche (théorique) initiale de lecteur à une démarche d'auteur peut se révéler problématique pour des élèves devant traduire des expressions algébriques données. Nous avons en effet supposé, d'après l'analyse épistémologique menée, que, de par l'inversion de l'ordre à travers lesquelles les deux démarches sont décrites, la reconnaissance des niveaux des assembleurs constituant chaque expression algébrique peut ne pas se faire aisément.

Si cette même problématique charpente la question 3 que nous traitons ici, celle-ci présente une complexité accrue. Car s'il s'agit de reconnaître les niveaux des assembleurs présents dans chaque expression algébrique, il s'agit avant tout de reconnaître les assembleurs proprement dits. Cette observation, qui aurait pu paraître anodine dans l'examen des expressions proposées dans les questions précédentes, ne l'est nullement dans l'analyse de notre première expression : l'expression A[60].

En effet, l'expression A présente un assembleur qui n'est point explicite : le signe de multiplication. Ainsi, placé devant l'expression A, l'élève doit avant tout ré-écrire (au moins mentalement) le produit qui n'est pas explicité, pour ensuite seulement être en mesure d'examiner les possibilités qui lui sont offertes relativement à la description rhétorique de l'expression.

Supposons que l'élève interprète correctement la concaténation de deux lettres comme la représentation de la multiplication de celles-ci.

Une seule phrase parmi celles proposées dans la colonne de droite présente l'assembleur de plus haut niveau (la division) en premier plan : la phrase 2. L'élève qui choisit cette réponse a certes reconnu l'assembleur de plus haut niveau (ne confondant pas inverse et opposé), mais n'aura pas remarqué que la phrase choisie traduit une expression de niveau trois tandis que l'expression A se veut de niveau deux. Nous pouvons supposer qu'un élève dans tel cas se contente de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, ne lisant pas entièrement la phrase proposée[61].

Bien que la phrase 3 ne commence pas par « l'inverse... », l'élève ayant choisi cette réponse pour décrire l'expression A présente, à notre avis, un profil très similaire à l'élève ayant choisi la phrase 2 pour cette expression. Tout d'abord tous deux semblent ne pas tenir compte de la différence de niveau entre l'expression décrite par la phrase choisie et l'expression algébrique en jeu. Ensuite, tout comme l'élève qui associe la phrase 2 à l'expression A, celui qui choisit la phrase 3 pour la décrire semble indiquer être capable reconnaître que le produit (de a et b) n'est non seulement pas l'assembleur de plus haut niveau, mais est de niveau deux. Finalement, nous proposons d'approfondir l'analogie entre les deux profils en suggérant que, tant l'élève qui associe la phrase 2 que celui choisissant la phrase 3 reconnaissent tous deux l'assembleur de plus haut niveau, l'élève associant la phrase 3 ayant tout simplement confondu « inverse » et « opposé ». Par ceci nous entendons que les

[60] Nous verrons, par la suite, qu'une telle réflexion s'étend aux deux autres expressions en jeu.
[61] Les phrases proposées traduisant toutes des expressions de niveau trois, ceci viendra possiblement conforter son choix.

deux élèves semblent avoir la même représentation (implicite) de l'arborescence combinatoire de l'expression 1/*ab*. L'élève qui ne choisit pas la réponse 2 et qui opte pour la réponse 3, refuse par là même de choisir la réponse 1, qui commence elle aussi par « l'opposé ». Il nous semble que ce choix révèle une faculté à percevoir l'expression algébrique comme étant de niveau deux, refusant de choisir la phrase dans laquelle le produit apparaît certes en tant qu'assembleur de plus bas niveau, mais au niveau trois ! L'expression étant donc perçue de niveau deux, l'élève qui choisit la phrase 3 montre bien avoir reconnu l'assembleur structurant l'expression algébrique. [62]

De cette analyse émanent certaines hypothèses relativement au cas où l'élève associe la phrase 1 à l'expression A. En effet, à partir des conclusions tirées précédemment, nous ne pouvons pas dire que l'élève a, dans ce cas, reconnu l'assembleur de plus haut niveau, en confondant simplement « opposé » et « inverse ». Il ne semble pas non plus avoir reconnu la structure générale de l'expression 1/*ab*, qui est une expression de niveau deux, où le produit est l'assembleur de plus bas niveau. Nous pouvons dire, en somme, qu'un tel choix ne nous semble pas révélateur quant à la démarche adoptée par l'élève et nous amène à supposer qu'il repose sur un examen visuel de l'énoncé (la phrase 1 étant en regard à l'expression A –les réponses apportées par cet élève aux deux autres expressions viendront infirmer ou confirmer notre hypothèse)[63].

Finalement, l'association attendue à cette expression est la réponse de type 4, que l'élève devra alors écrire de lui-même (« l'inverse du produit de *a* et *b* »). Nous nous attendons à ce que bon nombre d'élèves associent correctement cette expression, compte tenu du niveau peu élevé de l'expression et de la facilité à la décrire.

- <u>Expression B</u>

Avant d'amorcer l'analyse des stratégies possiblement empruntées par les élèves face à cette expression, analysons-la *per se*.

Nous avons souligné, lors de l'examen de l'expression A, que le premier pas à franchir par les élèves est celui relatif à la reconnaissance des assembleurs constituant l'expression, avant même la reconnaissance de celui de plus haut niveau, en évoquant, par la même occasion, la particularité de la multiplication, dont la représentation symbolique ne se fait pas de façon explicite.

Cette première démarche, nécessaire à la lecture de toutes les expressions algébriques, cependant implicite à la plupart des cas ici traités, révèle toute son importance pour l'expression B. Si l'assembleur de plus haut niveau (division) y est explicitement représenté, l'interprétation des assembleurs de niveau deux et un se font nettement moins aisément. En effet, la concaténation des signes –a-b peut se traduire par les deux phrases suivantes : « la différence entre l'opposé de *a* et *b* » ou encore : « la somme des opposés de *a* et de *b* ». Observons que dans ce dernier cas, l'assembleur de plus haut niveau de la sous-expression algébrique n'est pas explicitement représenté. Il sera alors peut-

[62] Ceci entraîne l'affirmation suivante : la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau d'une expression algébrique va bien au-delà de la faculté à le nommer.

être plus évident d'associer à « *-a-b* » le statut de « différence », la traduction du second « trait » se faisant alors de façon directe, plutôt que de voir dans « *-a-b* » une somme, où aucun signe de « croix » ne figure. Or même si la première traduction nous semble plus immédiate, elle implique déjà une bonne maîtrise du symbolisme. Il n'est pas en effet invraisemblable de supposer qu'un élève, face à « *-a-b* » soit troublé par l'interprétation du premier « trait »[64], antécédent la lettre *a*, qui indique l'opposé de *a*, et le second « trait »[65], graphiquement identique, voué à représenter une différence. Voulant éviter un double statut du signe «- » fort déconcertant, l'élève pourrait alors avoir tendance à lui accorder une signification unique. Dans ce cas, le statut d'opposé sera privilégié (puisque le premier « trait » ne peut être libellé comme une différence) et l'élève chercherait donc, parmi les phrases proposées, celle où la description des deux « traits » se fait en terme d'opposé. Ceci conduirait donc l'élève, s'il privilégie les phrases fournies par l'énoncé, dans un premier temps, à associer la phrase 2 à l'expression B. D'autres éléments semblent venir conforter un tel choix.

Observons tout d'abord que la « division » figure en tête de phrase dans la réponse 2, lui attribuant le statut d'assembleur de plus haut niveau. Soulignons ensuite que la phrase « le produit des opposés de *a* et *b* », usuellement représentée par (-a)(-b), peut facilement être interprétée, par un élève dont le rapport au symbolisme est partiel (le cas de plusieurs élèves de 4$^{\text{ème}}$), par la concaténation « -a-b ». L'élève pour qui le rôle des parenthèses reste encore flou[66] mais qui montre être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, choisira alors, à notre avis, la réponse 2 pour décrire l'expression A.

La réponse attendue (de type 4 – que l'élève devra écrire lui-même) restera, à nos yeux, minoritaire dans les réponses apportées par les élèves. Nous avons vu, d'après l'analyse précédente, que l'association de cette expression à sa phrase en français suppose une ré-écriture (au moins implicite), faisant donc intervenir le *sens* de l'expression algébrique en question. De plus, la phrase attendue n'est non seulement pas proposée par l'énoncé mais est la seconde phrase de cette question dont la production est laissée à la charge des élèves. L'élève ayant déjà fourni une réponse de type 4 à l'expression précédente, pourrait s'imaginer qu'une seule phrase doit être écrite, ce qui l'induirait à choisir une réponse parmi celles proposées dans la colonne de droite.

Examinons, à présent, les différentes réponses possibles des élèves en tenant compte de leurs réponses antérieures.

L'analyse menée dans le paragraphe précédent semble indiquer que bon nombre d'élèves produiront d'eux-mêmes la phrase attendue pour l'expression A, en lui associant la réponse de type 4. Ils auront donc, à nouveau, le choix entre les réponses 1, 2, 3 et 4 pour l'expression B. D'après les

---

[63]L'élève qui suivra cette démarche répondra 2 pour l'expression B et 3 pour l'expression C. Nous ne reviendrons pas sur cette démarche dans la suite de notre analyse.
[64] Assembleur à une place.
[65] Assembleur à deux places.
[66] Bien souvent, les élèves montrent avoir du mal à discerner les cas où l'emploi de délimitants relève un caractère nécessaire et où, au contraire, il est superflu sans pour autant modifier l'interprétation du texte symbolique.

conclusions issues des paragraphes qui précèdent, nous pouvons supposer que la plupart des élèves, dans ce cas, choisiront la phrase 2 au détriment des réponses 1 et 3 pour décrire l'expression B, confirmant l'hypothèse concernant leur faculté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, mais exposant leur fragilité face au rôle des parenthèses.

L'élève qui choisit la phrase 2 pour l'expression A montre également être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'expression algébrique. Ainsi, nous pensons qu'il ne choisira ni la phrase 1 ni la phrase 3 pour traduire l'expression B et préfèrera écrire lui-même une phrase commençant par « l'inverse de... ». La phrase attendue étant, cependant, difficile à produire, il nous est difficile d'émettre des hypothèses plus substantielles.

Finalement, considérons le cas où l'élève associe la phrase 3 à l'expression A. Nous avons conclu que l'élève, dans ce cas, montre être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'expression. Cette hypothèse viendrait se confirmer si, pour l'expression B, l'élève choisit la phrase 2, ce qui est, nous l'avons vu, le plus vraisemblable.

- <u>Expression C</u>

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que la lecture des expressions algébriques de cette question ne se fait pas, sur le plan théorique, comme celle des questions 1 et 2 : associer les expressions de la question 3 à leurs phrases en français suppose, en effet, une ré-écriture de celles-ci et demande, de la part des élèves, un appel à leur *sens*. Si dans le cas de l'expression A cette ré-écriture peut sembler quasi accessoire (elle intervient uniquement au niveau de l'interprétation de la juxtaposition des lettres *a* et *b*), elle est déterminante pour la lecture de l'expression B. L'expression C se rapproche, sur ce plan, davantage de l'expression A, pour laquelle la ré-écriture ne joue pas un rôle primordial. Cependant, l'expression C présente une particularité qui mérite d'être soulignée ici : le nombre de ses possibles traductions en français.

Nous pouvons considérer par exemple, les phrases : « l'inverse de l'opposé du produit de *a* et de *b* », « l'inverse du produit de l'opposé de *a* et de *b* », « l'inverse du produit de *a* et de l'opposé de *b* », « l'opposé de l'inverse du produit de *a* et *b* », « l'opposé du produit des inverses de *a* et de *b* », « le produit de l'opposé de l'inverse de *a* et de l'inverse de *b* », etc. L'élève n'a certes pas besoin de reconnaître l'équivalence de toutes ces traductions pour répondre correctement à la question, toutefois celle qu'il choisira[67] sera sans doute révélatrice de la démarche adoptée. Il s'agira alors de tenter d'interpréter la réponse d'un élève ayant privilégié l'opposé au détriment de l'inverse, tous deux étant susceptibles de remplir le rôle d'assembleur de plus haut niveau de l'expression.

D'après les analyses *a priori* des réponses apportées aux expressions A et B, nous pouvons dire que deux cas de figure semblent se dessiner avec une plus grande probabilité : soit l'élève associe la phrase 2 à l'expression A et donc choisit la réponse 4 pour décrire l'expression B, soit l'inverse (qui sera, à notre avis, le choix majoritairement effectué par les élèves). Dans tous les cas, l'élève aura donc le choix entre les réponses 1, 3 et 4 pour l'expression C.

L'association de la réponse 4 à l'expression C sera, à notre avis, minoritaire. En effet, les deux cas envisagés pour les réponses apportées aux expressions A et B indiquent une capacité de la part des élèves à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de chaque expression[68]. D'un autre côté, nous avons vu que l'expression C possède plusieurs traductions rhétoriques possibles, dont les phrases 1 et 3 figurant dans la colonne de droite. Ainsi, nous pensons que, face à l'expression $-1/ab$, l'élève privilégiera les traductions déjà fournies dans l'énoncé, accordant au signe « - » le rôle d'assembleur de plus haut niveau.

Bien que les phrases 1 et 3 traduisent toutes deux l'expression C, la troisième suppose, comme nous l'avions déjà souligné, une ré-écriture (au moins mentale) de l'expression. De ce fait, nous nous attendons à un effectif plus élevé d'associations à la phrase 1 que d'associations à la phrase 3 dans le cas où l'élève montre être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau, i.e. les cas 4-2 et 2-4.

Conclusion

A cette dernière question, nous envisageons deux principales catégories de réponses, relatives aux cas où l'élève reconnaît l'assembleur de plus haut niveau de l'expression.

La première catégorie, 4-2-1, sera à nos yeux majoritaire parmi l'ensemble des réponses recueillies. L'élève avec ce profil indiquera une bonne faculté à traduire en langage naturel les expressions algébriques données[69], cependant montrera une faible maîtrise des parenthèses.

La seconde catégorie de réponses, dénotée 3-2-1, indiquera un plus faible rapport des élèves au symbolisme, ceux-ci ayant associé correctement une seule expression à sa description rhétorique.

Exercice 2

Question a

Comme nous l'avons déjà souligné précédemment (cf. section IV.1.2), pour répondre correctement à cette question, un simple comptage suffit. Nous nous attendons donc à un taux élevé de réussite.

Question b

Il s'agit dans cette question de déterminer le nombre de pépites de chocolat que contient la tablette 11x9 qui n'est pas représentée dans l'énoncé. Deux cas de figure se présentent, essentiellement.

---

[67] Nous reviendrons par la suite à la question du « choix » de l'élève pour cette expression.
[68] Nous renvoyons le lecteur à nos hypothèse précédentes relativement au choix de la réponse de type 4.
[69] Supposant que la phrase écrite corresponde à la phrase attendue.

Après l'examen des trois figures proposées par l'énoncé (tablettes 2x2, 3x2 et 5x3), l'élève peut avoir saisi le « modèle général » d'une tablette quelconque, s'apercevant qu'une tablette $x \times y$ contient (x-1)x(y-1) pépites. Ainsi, pour cette question (et cela s'appliquera à la question suivante), il lui suffira d'effectuer la multiplication 10x8. Notons que celui qui donnera le résultat sous forme d'une multiplication, sans pour autant fournir le résultat de celle-ci, indiquera, à nos yeux, avoir compris la construction d'une tablette quelconque.

Ce premier cas étant à notre avis marginal -le seul examen des trois cas représentés dans l'énoncé étant à nos yeux insuffisant pour permettre, à ce stade de l'exercice, une généralisation du processus de construction, nous nous attendons à ce que bon nombre d'élèves aient recours à un dessin pour répondre à cette question. En effet, les nombres choisis (11 et 9) laissent la possibilité à l'élève de représenter la tablette en question, ou tout du moins une partie de celle-ci. L'élève qui n'aura donc pas saisi le modèle d'une tablette quelconque pourra se servir de son dessin pour retrouver, à travers un simple comptage, le nombre de pépites que contient la tablette 11x9.

Question c

Il s'agit à nouveau, dans cette question, de déterminer le nombre de pépites que contient une tablette donnée dont la représentation ne figure pas dans l'énoncé.

L'élève qui, dès la première question, aura compris le modèle général d'une tablette quelconque n'aura pas, à notre avis, recours au dessin pour répondre à cette question et, de façon analogue à la question précédente, effectuera la multiplication 19x16 (en fournissant, ou pas, le résultat explicite de celle-ci).

Le deuxième cas traité dans l'analyse *a priori* de la question précédente nous conduit à l'examen de deux possibilités pour la résolution de celle-ci. D'un côté, le dessin de la tablette 11x9 ébauché par l'élève pour répondre à la question (b) peut lui avoir permis de comprendre le processus de construction d'une tablette quelconque. Ainsi, le dessin ne lui étant plus nécessaire pour la détermination du nombre de pépites dans une tablette quelconque, il suffira à l'élève d'effectuer la multiplication 19x16 (en fournissant éventuellement le résultat de celle-ci). A l'inverse, nous pouvons imaginer que l'examen de la question précédente n'aura pas suffi à l'élève pour saisir le modèle général d'une tablette. Les nombres qui servent à décrire la tablette en jeu (20 et 17) ayant été choisis de façon à décourager les élèves d'avoir recours à un dessin, nous pensons que peu d'élèves dans ce cas représenteront la tablette pour répondre à cette question, ceci impliquant éventuellement un nombre élevé de fausses réponses (ou de non réponse).

Question d

Pour répondre correctement à cette question, l'élève doit faire appel à deux compétences, indépendantes et de nature distincte.

Tout d'abord, l'élève doit montrer être capable de préciser la nature de la relation qui existe entre le nombre de noisettes et le nombre de pépites contenues dans une tablette (la façon dont la question est formulée induit l'élève à supposer qui existe un lien entre le nombre de pépites et de noisettes). Les élèves ayant notamment pu répondre à l'une des deux questions précédentes sans avoir eu recours à un dessin, par exemple, montrent avoir une telle faculté.

Or la reconnaissance du patron d'une tablette quelconque n'est pas suffisante pour répondre à cette question. En effet, l'élève doit aussi -et tel est l'objet principal de cette question- pouvoir exprimer ladite relation entre noisettes et pépites. Trois cas de figure se présentent alors.

Le premier est celui où l'élève décrit la formule exclusivement en français (bien qu'envisageable, cette solution nous semble trop fastidieuse pour être adoptée par un grand nombre d'élèves). Dans le second cas, l'élève peut faire usage de lettres en décrivant, à l'aide d'une formule, le processus qui permet d'obtenir le nombre de pépites d'une tablette. Finalement, nous pouvons envisager une description intermédiaire entre le rhétorique et le symbolique, où l'élève se servirait de lettres pour désigner le nombre noisettes en longueur et en largeur sans pour autant donner explicitement la formule attendue : $(x\text{-}1)(y\text{-}1)$ [70]. Nous pensons qu'une telle écriture intermédiaire devrait se révéler majoritaire parmi les réponses des élèves pour lesquels, à ce niveau scolaire, le rapport au symbolisme est encore fragile.

Question e

Si pour répondre correctement à la question précédente, il était nécessaire (et cependant non suffisant) de comprendre l' «allure générale » d'une tablette quelconque, il en va de même pour la question (e). Le mode de donation d'une tablette (au sens frégéen du terme) étant intimement lié au nombre de noisettes en longueur et en largeur qu'elle contient, déterminer la (ou les) tablettes contenant 7 pépites (ce qui revient à la caractériser à travers la quantité de noisettes en longueur et en largeur), implique connaître la relation entre le nombre de pépites et le nombre de noisettes contenues dans une tablette de chocolat.

Or jusqu'à présent cette relation était explorée de façon unilatérale : à partir d'un nombre donné de noisettes, il s'agissait de déterminer le nombre de pépites. Ici, non seulement la question est posée dans le sens inverse mais dévoile une autre dimension: celle relative aux conditions d'existence d'une tablette. En effet, il s'agit ici de s'interroger sur la nature des grandeurs intervenant dans la relation noisettes/pépites : pour tout nombre entier naturel n, est-il possible de concevoir une tablette de chocolat contenant n pépites? En d'autres mots, pour tout entier naturel n, est-il possible de trouver des entiers naturels x et y tels que $(x\text{-}1)(y\text{-}1) = n$? En particulier, peut-on trouver x et y tels que $(x\text{-}1)(y\text{-}1) = 7$?

[70] Dans le cas où x et y désignent le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur.

Ainsi, pour répondre correctement à la question (e), il n'est pas suffisant d'avoir trouvé la relation (sans l'avoir nécessairement explicitée) entre le nombre de noisettes et nombre de pépites. Il faut être capable de la percevoir sous le prisme de la divisibilité[71]. De ce fait, nous pensons, d'une part, que les élèves n'ayant pas montré, à travers leur réponses aux questions précédentes, avoir compris la structure générale d'une tablette, ne seront pas en mesure de répondre correctement à cette question et, d'autre part, que les élèves ayant répondu correctement aux questions précédentes ne fourniront pas nécessairement la réponse attendue à cette question. Ainsi, pour les élèves ayant apporté une réponse incorrecte aux questions précédentes (surtout aux questions b et c), nous nous attendons à un faible taux de réussite à la question (e). Quant aux autres élèves, peu d'inférences peuvent être faites. Nous nous attendons néanmoins à un taux de réussite plus élevé parmi les élèves ayant été capables de décrire la relation noisettes/pépites sous forme algébrique étant donné que la question de divisibilité y est alors plus explicite.

V.2.1.4 – Analyse des productions d'élèves (4ème)

Pour chacun des deux exercices examinés dans les paragraphes précédents, nous procèderons à une analyse *a posteriori* des réponses des élèves de 4ème en deux temps : après avoir abordé les productions écrites de la classe de 4ème, nous analyserons l'entretien individuel mené auprès de l'élève du même niveau. Dans les deux cas, nous veillerons à souligner les similitudes et/ou différences entre les réponses apportées aux différentes questions et les hypothèses développées lors de notre analyse *a priori*.

Exercice 1 – Productions écrites

Question 1

Les données recueillies ont été regroupées dans deux tableaux différents, dont les lectures se veulent complémentaires. Tandis que le premier tableau regroupe les effectifs obtenus à cette première question, le second décrit les successions de réponses apportées par chaque élève n'ayant pas produit les associations attendues. Dans l'analyse qui suivra, les deux dimensions, quantitatives et qualitatives des réponses, seront prises en compte.

[71] En reprenant le discours d'Arzarello, nous pourrions dire –bien que la relation ne soit pas nécessairement explicitée algébriquement par l'élève- qu'il s'agit ici de trouver une nouvelle *intension* (supposée) à cette relation sans effectuer des manipulations formelles, en décelant une nouvelle *extension* (supposée). Autrement dit, c'est entrevoir les différents *sens* de la même expression.

Exp. math / **Réponses**	**A** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$	**B** $\frac{1}{a^2+b^2}$	**C** $\frac{1}{(a+b)^2}$
1	2	3	**11**+9
2	**11**+12	3	0
3	0	1	5
4	1	**11**+7	1
sans rép.	0	1	0
Autre	1	1	1
Total réponses	27	26	27

L'inverse du carré de la somme de a et b
La somme des inverses des carrés de a et b
Le carré de la somme des inverses de a et b
autre(s)

Tableau 1

Légende :

- Les cellules en gras représentent les effectifs de réponse les plus importants
- Les cellules hachurées désignent les associations attendues
- Les effectifs en gras (+11) correspondent aux élèves dont toutes les réponses sont correctes

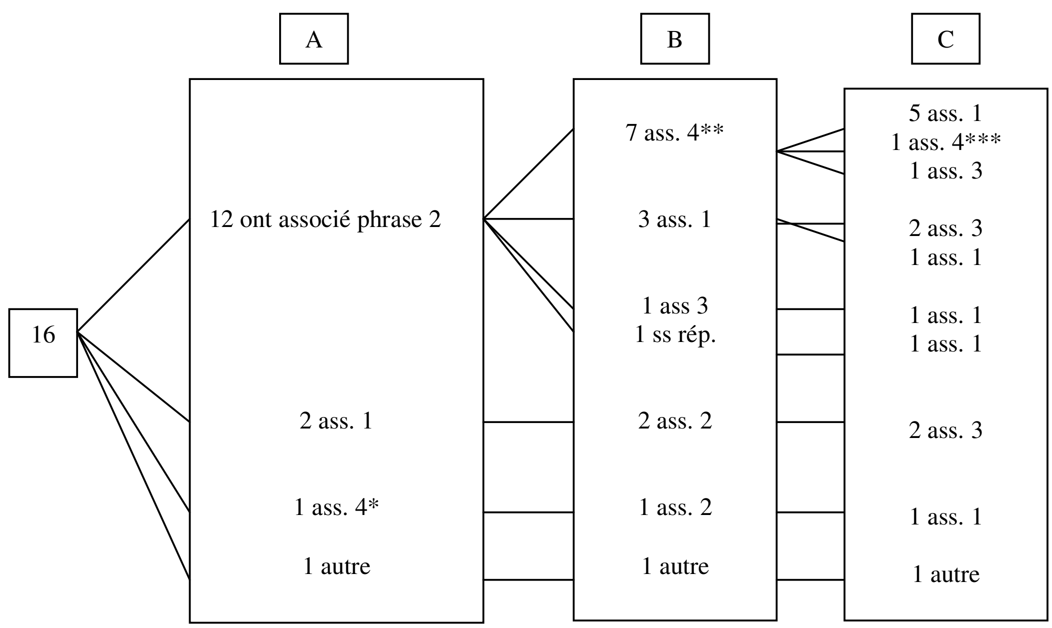


Tableau 2[72]

Légende :
*L'élève a répondu : « La somme de l'inverse de a au carré et l'inverse de b au carré ».

**1 : rien écrit — 1 : « la somme de A+B au carré »
2 : juste — 1 : « la somme des inverses du carré de A et du carré de b »
1 : « inverse des carrés de la somme de A et B » — 1 : « l'opposé de la somme de A^2 et B^2 »

*** rien écrit

[72] Ce type de tableau prend uniquement en compte les réponses des élèves n'ayant pas associé correctement toutes les expressions.

Nous résumons les résultats de l'analyse des productions d'élèves dans les paragraphes suivants.

Observons tout d'abord que l'écrasante majorité des élèves ont abordé cet exercice, confirmant nos hypothèses *a priori* en ce qui concerne la complexité des expressions et l'investissement des élèves dans la tâche. En effet, seul un élève n'a pas compris les consignes données dans l'exercice[73], le taux de non réponse étant par ailleurs très faible. De plus, 11 élèves sur un total de 27 ont associé correctement les expressions algébriques avec leur description en langage naturel, ce qui nous laisse supposer que la complexité de l'exercice est relativement bien adaptée au niveau de 4ème.

En ce qui concerne l'expression A, l'écrasante majorité des élèves (23 sur 27) ont associé correctement la phrase en français qui la décrit. Il est néanmoins important de souligner que, comme nous l'avons précisé dans l'analyse *a priori*, l'association correcte à cette première expression ne nous renseigne aucunement sur la faculté des élèves à reconnaître le niveau des assembleurs de l'expression algébrique en question. En effet, en choisissant la phrase 2 pour l'expression A, la majorité des élèves montre être capable de reconnaître au moins l'assembleur de plus haut niveau ; seul l'examen des réponses apportées aux expressions suivantes pourra enrichir notre interprétation.

L'expression B, contrairement à l'expression précédente, présente un taux de bonne réponse nettement inférieur. Même si beaucoup (18 élèves sur 27) ont choisi l'option attendue libellée « autre » (réponse 4), seuls 13 élèves sur 18 ont écrit la phrase correcte en français. Parmi les cinq autres propositions données par les élèves, on observe de nombreuses confusions entre « inverse » et « opposé » ou encore on repère l'élision de l'inverse dans les phrases. La phrase attendue en français a toutefois été correctement écrite par bon nombre d'élèves (13 sur 26), et seuls 3 élèves ont associé à l'expression B la phrase en français où le terme « inverse » figurait en tête de phrase (phrase 1). Ainsi, nous retrouvons en écrasante majorité la suite de réponses 2-4, suivie de la succession et 2-1, comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*. D'après les réponses des élèves apportées à cette question, nous pouvons compléter l'analyse faite précédemment en disant que plus de la moitié des élèves ayant associé la phrase 2 à l'expression A semblent avoir reconnu le niveau de l'ensemble des assembleurs de l'expression (13 élèves sur les 23 ont écrit la phrase attendue pour traduire l'expression B) et que seule une minorité d'élèves indiquent que leur choix pour l'expression A était uniquement fondée sur la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau (3 élèves ont choisi pour l'expression B la phrase proposée par l'énoncé commençant par « l'inverse »).

L'expression C présente un meilleur taux de bonnes associations (20 sur 27) que pour l'expression B, le second choix des élèves (5 sur 27) étant de faire correspondre la phrase 3 à

[73] Il a interprété la tâche comme s'il s'agissait d'établir la véracité de chaque ensemble « expression algébrique/ phrase en français ». Ainsi, par exemple, à la question 1, à côté de l' « ensemble A1 », il a écrit V, à côté de l' « ensemble B2 », a écrit V et pour C3 a écrit F, ce qui l'a conduit à écrire une autre phrase en français dans le rectangle prévu pour l'expression C. Les réponses apportées par cet élèves ont été classées dans l'avant-dernière ligne de notre tableau.

l'expression C. Il est important de souligner que les élèves dans ce cas sont ceux qui avaient déjà choisi la phrase 1 (celle qui correspond à l'expression C) ou la phrase 2 aux deux expressions précédentes (et pour qui donc la phrase 3 était la « dernière possible » parmi celles proposées). Nous ne pouvons pas dire que, pour ces élèves, la correspondance à la dernière expression relève d'un choix réel ; il nous semble plutôt qu'ils aient procédé par élimination.

En résumé, nous pouvons affirmer que la classe de $4^{ème}$ apporte, dans l'ensemble, de bons résultats à cette question. Parmi les trois expressions algébriques proposées, la première est celle qui présente le meilleur taux de bonnes réponses, les questions B et C étant moins bien réussies. La majorité des élèves semble lire la totalité des phrases en français, ne se satisfaisant pas de choisir la phrase où le signe opératoire principal[74] est en tête de phrase (cf. expression B pour laquelle peu choisissent la phrase 1). Les élèves ne semblent pas non plus privilégier les formules déjà fournies, allant jusqu'à proposer d'eux mêmes des expressions à leurs yeux mieux adaptées.

Finalement, nous retrouvons trois catégories de réponses parmi les copies des élèves. La première étant la succession 2-4-1, figurant parmi 16 réponses d'élèves (la phrase 4 produite n'étant pas toujours celle attendue). Ensuite nous retrouvons la catégorie 1-2-3, retrouvée dans deux copies d'élèves, qui auraient visiblement choisi d'associer aux expressions algébriques les phrases en français en regard. Observons que la catégorie 2-1-4, que nous avions envisagée dans l'analyse *a priori*, ne figure dans aucune production recueillie. A celle-ci semble venir se substituer la succession 2-1-3, choisie par deux élèves. Cette catégorie, rappelons-le, n'avait pas été retenue dans notre analyse *a priori* car nous elle nous semblait incohérente. En effet, l'élève qui choisit respectivement les réponses 2 et 1 pour les expressions A et B semble reconnaître l'assembleur de plus haut niveau. Or choisir la phrase 3, qui commence par la description de l'assembleur de niveau 2, pour l'expression C nous semble aller à l'encontre d'une telle démarche. Nous pouvons supposer alors que les deux élèves ayant un tel profil reconnaissent l'assembleur de plus haut niveau des expressions A et B mais privilégient les phrases déjà fournies dans l'énoncé.

Question 2

Nous pouvons regrouper nos données dans les deux tableaux suivants.

[74] Principal, c'est-à-dire de plus haut niveau aux yeux de l'auteur de l'expression.

Exp. math / Réponses	A $\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2$	B $\frac{a^2+b^2}{3}$	C $\frac{(a+b)^2}{3}$	D $\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}$	
1	1	**16**+7	1	0	*Le tiers de la somme des carrés de a et b*
2	**16**+3	1	1	5	*La somme des carrés des tiers de a et b*
3	6	1	2	**16** + 1	*La somme des tiers des carrés de a et b*
4	0	1	**16** + 6	3	*Le tiers du carré de la somme de a et b*
5	0	0	0	1	*autre*
autre	1	1	1	1	
Total réponses	27	27	27	27	

Tableau 3

Légende :

- Les cellules en gras représentent les effectifs de réponse les plus importants
- Les cellules hachurées désignent les associations attendues
- Les effectifs en gras (+16) correspondent aux élèves dont toutes les réponses sont correctes

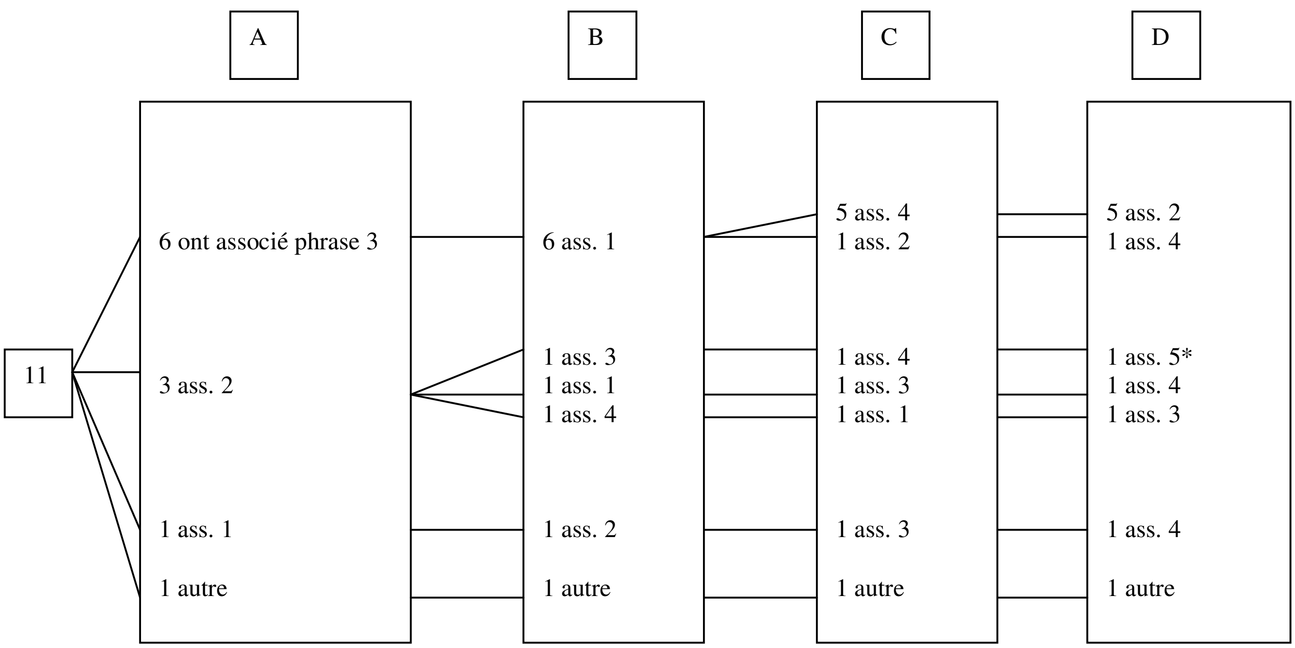


Tableau 4

Légende :
*L'élève a écrit : « le tiers de la somme du carré de A et du carré de B »

Observons tout d'abord que, dans l'ensemble, cette question a été mieux réussie que la précédente : 16 élèves sur 27 ont associé correctement toutes les expressions algébriques avec leur description en langage naturel.

Plus précisément, pour l'expression algébrique A, un grand nombre d'élèves (18 sur 27) ont choisi l'expression en français qui la décrit. Le deuxième choix (6 sur 27) semble montrer que les élèves ont reconnu le signe opératoire principal de l'expression (*i.e.* la somme), inversant cependant quelques fois l'ordre des opérations « tiers » et « carré ». Là encore, le taux de réussite élevé laisse supposer une lecture complète de la phrase en français, affirmation que nous devons cependant nuancer par une simple observation : le second choix adopté par les élèves est aussi second dans son apparition sur l'énoncé. Dans tous les cas, les élèves ayant choisi la phrase 3 (« la somme des tiers des carrés de a et b ») pour l'expression A sembleraient l'avoir fait « consciemment ».

L'expression B présente un taux de réussite nettement supérieur à l'expression précédente : 23 élèves sur 27 ont correctement associé cette expression à sa description rhétorique « structurale », les quatre autres réponses étant toutes différentes les unes des autres. Cette différence de taux de réussite entre cette expression et la précédente semble venir confirmer notre hypothèse quant à la complexité des expressions en jeu : les élèves semblent avoir plus de facilité à décrire l'expression B que l'expression A.

L'expression C présente, à une unité près, un taux de réussite similaire à celui de l'expression précédente. Là encore, ce taux semble montrer que les élèves choisissent consciencieusement les phrases, ne se contentant pas de celles où le signe opératoire principal[75] figure en tête de phrase. Observons que, bien qu'il soit marginal, le second choix de description rhétorique pour cette expression ne présente pas le terme « tiers » en tête de phrase.

Finalement, l'expression D présente le taux de réussite le moins élevé pour l'ensemble de cette question : 17 élèves sur 27 ont associé la phrase 3 à l'expression D (parmi lesquels nous retrouvons les 16 élèves ayant répondu correctement à toutes les expressions). Observons que le second choix (la phrase 2) respecte la structure de l'expression algébrique en jeu (*i.e.* une somme) mais inverse l'ordre des termes « tiers » et « carré ». Les élèves ayant effectué ce choix sont ceux qui ont fait correspondre à l'expression A la phrase 3, c'est-à-dire sont ceux qui ont confondu « la somme des carrés des tiers » avec « la somme des tiers des carrés ».

En résumé, nous pouvons dire que, dans l'ensemble, cette seconde question a été bien réussie par les élèves. Observons que cette question présentait, contrairement à la question 1, dans son énoncé, toutes les phrases en français décrivant les expressions de A à D. Remarquons également que les élèves semblent avoir eu plus de difficultés à cerner les différences entre $\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2$ et $\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3}$ que celles entre $\frac{a^2+b^2}{3}$ et $\frac{(a+b)^2}{3}$. Finalement, nous pouvons observer que deux catégories, parmi celles envisagées dans notre analyse *a priori*, se sont révélées majoritaires parmi les réponses recueillies. La première correspond à la succession de réponses attendues (2-1-4-3) retrouvée parmi 16

[75] Si l'on se place en tant qu'auteur de l'expression.

productions d'élèves. La seconde correspond au profil 3-1-4-2, présenté par 5 élèves. Compte tenu de ces deux informations et de la hiérarchie que nous avons établie pour l'ensemble des catégories, nous pouvons conclure que les élèves de 4$^{\text{ème}}$, pour cette question, reconnaissent au moins l'assembleur de plus haut niveau des expressions algébriques proposées, leur faculté à reconnaître les niveaux des autres assembleurs étant vraisemblablement dépendante de la complexité des expressions données.

Question 3

Parmi l'ensemble des trois questions qui composent ce premier exercice, celle-ci est de loin celle qui présente le moins bon taux de réussite. En effet, seul un élève a associé correctement les trois expressions algébriques aux traductions qui leur correspondaient. Nos hypothèses concernant la complexité des expressions en jeu semblent alors se confirmer.

Voici les tableaux regroupant les effectifs relatifs à cette question :

	$\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{-a-b}$	$\frac{-1}{ab}$
Exp. math / Réponses	**A**	**B**	**C**
1	1	3	**1**+21
2	1	20	1
3	3	2	3
4	**1**+ 20	**1**	0
autre	1	1	1
Total réponses	27	27	27

L'opposé de l'inverse du produit de a et b
L'inverse du produit des opposés de a et b
L'opposé du produit des inverses de a et b
autre(s)

Tableau 5

Légende :
- Les cellules en gras représentent les effectifs de réponse les plus importants
- Les cellules hachurées désignent les associations attendues
- L'effectif en gras (+1) correspondent aux élèves dont toutes les réponses sont correctes

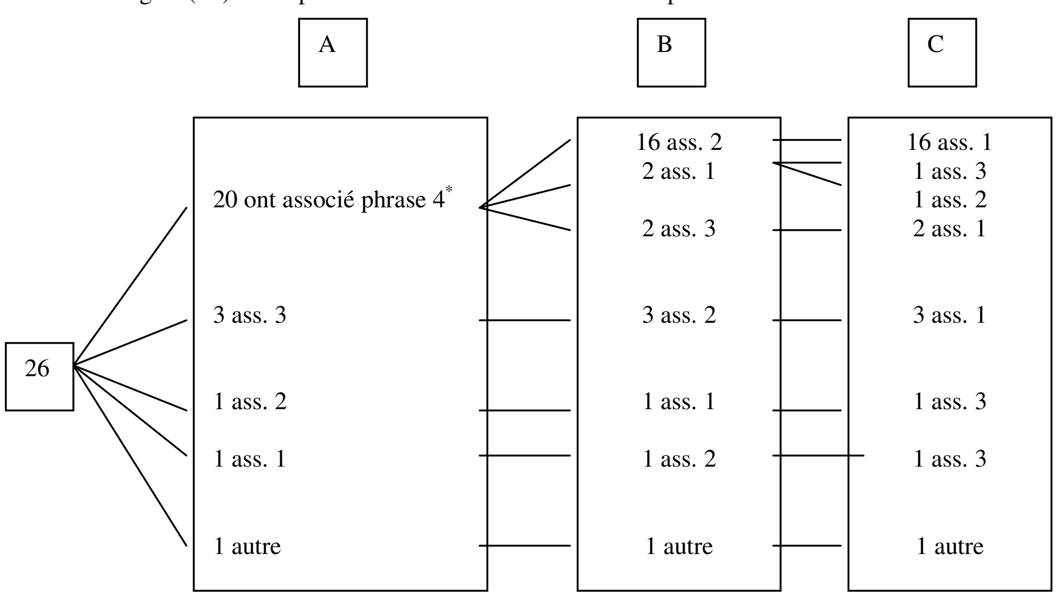


Tableau 6

Légende :

* 12 : juste	2 : « inverse du produit de ab »
2 : « inverse de A et B »	1 : « opposé de a et b »
2 : rien écrit	1 : A = $\frac{-1}{ab}$

La majorité des élèves (15 sur 27) ont écrit d'eux-mêmes l'expression en français traduisant l'expression algébrique A, ne se laissant pas influencer par la phrase 2, qui affiche le terme « inverse » au premier rang. Ceci semble venir conforter l'hypothèse selon laquelle les élèves auraient tendance à lire entièrement les phrases proposées, ne se fiant pas simplement au premier terme rencontré.

L'expression B, quant à elle, relève du plus bas taux de réussite de l'ensemble des trois questions proposées. En effet, l'écrasante majorité des élèves (20 sur 27) ont associé la phrase 2, où figure le terme d'inverse. A ceci nous voyons trois raisons essentielles, explorées dans notre analyse *a priori*. Soulignons tout d'abord que les élèves avaient déjà associé « autre » à l'expression précédente ; peut-être ne se doutaient-ils pas qu'il fallait, à nouveau, écrire la phrase correspondante à cette expression (bien que l'énoncé prévoie implicitement la multiplicité des réponses). D'autre part, la traduction de cette expression non seulement ne figure pas parmi les possibles, mais se révèle beaucoup plus difficile à concevoir que celle associée à la première expression. En effet, si l'on choisit la formule rhétorique la plus « brève », comme celle que nous avons proposée (« l'inverse de la somme des opposés de *a* et *b* »), cela implique un changement de point de vue sur l'expression : plutôt que voir le dénominateur comme une différence de deux nombres, il s'agit de le voir comme une somme de deux opposés de nombres, ce qui nous semble être relativement complexe pour des élèves de 4ème. Finalement, comme nous l'avons souligné lors de l'analyse a priori, l'expression B recèle un signe opératoire « - » dont le statut est double[76] : tandis que celui qui précède la lettre *a* revêt le caractère d' « opposé », celui précédent la lettre b évoque l'opération de soustraction. La difficulté qu'ont éprouvé les élèves à répondre à cette question semble indiquer que ce double statut n'est point facile à gérer.

Finalement, bon nombre d'élèves ont associé correctement l'expression C et la phrase qui lui correspond. Cependant, l'élève avait ici le choix entre deux phrases, toutes deux « correctes » : la phrase 1, dont la correspondance à l'expression C se fait « directement » et la phrase 3, qui traduit une ré-écriture de l'expression C. La majorité des élèves ayant choisi la phrase 1 (16 sur 22) n'avaient pas encore choisi la phrase 3 pour les expressions précédentes et donc avaient le choix entre les deux. Les six autres avaient cependant déjà attribué la phrase 3 aux expressions A et B. Nous ne sommes donc pas en mesure de savoir à quel point ce choix est valide ou s'il relève d'une méthode par élimination de la part des élèves.

Finalement, de l'analyse *a posteriori* ressortent trois catégories de réponses à cette question. La majorité des élèves (16 sur 27) ont le profil 4-2-1, confirmant nos attentes et indiquant une

[76] Notons que sa combinatoire est également double : le signe «-» est unaire lorsqu'il traduit le concept d'opposé et binaire lorsqu'il s'agit de l'opération de soustraction.

reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau de toutes les expressions. La seconde catégorie (3-2-1), bien que moins significative (3 élèves sur 27) indique également de la part des élèves la reconnaissance de l'assembleur structurant des expressions, cependant elle révèle de la part des élèves une moins bonne maîtrise du symbolisme avec notamment confusion entre inverse et opposé. Finalement, deux élèves ont le profil 4-3-1, non retenu dans l'analyse *a priori* et qui semble indiquer de la part des élèves une certaine difficulté à changer de point de vue, i.e. de passer de la position de lecteur à la position d'auteur d'une expression algébrique.

Exercice 1 – Entretien

La rencontre avec l'élève de la classe de 4ème s'est faite en deux moments : après lui avoir laissé du temps pour qu'il résolve seul l'exercice, une période de discussion entre l'élève (noté **E** dans le dialogue) et l'observateur (noté **O** dans le dialogue) a été enregistrée. Nous avons retranscrit ci-dessous quelques parties de cet échange, analysées par la suite, en indiquant explicitement les questions auxquelles les différents moments du dialogue se rapportaient[77].

<u>Question 1</u>

<u>Expression A</u>

1 **E** *: Là j'étais sûr que c'était le 2 parce que c'est la somme de quelque chose.*

2 **O** *: Mais est-ce que c'est suffisant ? Tu t'es arrêté là, tu as vu que c'était la somme...*

3 **E** *:* [interrompt] *Ah, oui, ça aurait pu être un autre.*

4 **E** *: Déjà il y a des inverses... et c'est des carrés... ça correspond...*

<u>Expressions B et C</u>

5 **E** *: Bon, alors là, je ne sais plus trop... L'inverse ... Déjà il y a un grand inverse.*

[l'élève se rend compte qu'il a commis une erreur : il a associé à l'expression B la phrase 1]

6 **E** : *Non... Le 1 serait plutôt celui-là* [se réfère à l'expression C], *je pense. Parce que le carré de la somme ça veut dire que ce doit être... Il doit y avoir une parenthèse. Donc le 1 doit être celui-là* [se réfère à C].

7 **E :** *Ben celui-là c'est ...* [l'élève revient sur l'expression B et réfléchit] *L'inverse de la somme de a au carré plus b au carré. L'inverse de la somme du carré de a et b. Mais il n'y est pas là-dedans.*

[77] Étant donné qu'il ne s'agit pas ici de la retranscription intégrale de l'entretien, nous avons choisi de noter par "//" les différentes ruptures de dialogue ayant lieu à l'intérieur d'une même question (entre chaque question, cette rupture, si elle existe, ne sera pas marquée explicitement). Ce signe devra être interprété différemment des points de suspensions, voués à indiquer une pause plus ou moins longue, à l'oral, de chacun des protagonistes.

Commentaires

Avant d'amorcer l'analyse du rapport de cet élève au symbolisme et de comparer ses réponses à celles des élèves de la classe de 4ème étudiées précédemment, il convient de souligner que, bien que l'entretien n'ait été mené qu'avec un seul élève de 4ème, ces premiers échanges, révélateurs de la démarche adoptée par celui-ci, semblent venir confirmer quelques hypothèses développées dans notre analyse *a priori*. En effet, pour commencer, l'élève semble adopter la démarche que nous avons dénommée « démarche 1 », partant des expressions algébriques pour trouver leur traduction rhétorique correspondante[78]. Plus précisément, celui-ci traite chaque expression algébrique au cas par cas et dans l'ordre de leur apparition.

En ce qui concerne les associations effectuées par cet élève, la première ligne du dialogue semble témoigner de la faculté de l'élève à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'expression (ligne 1 : « c'est la somme de quelque chose »). De plus, la suite du dialogue suggère que celui-ci ne lit pas la totalité des phrases en français et se contente de choisir la phrase où l'assembleur structurant l'expression algébrique figure en premier plan (ligne 3 : « ah, oui, ça aurait pu être un autre »)[79]. La remarque apportée par l'observateur à ce niveau semble d'ailleurs déstabiliser l'élève, qui se met à douter de l'exactitude des réponses apportées aux expressions suivantes (ligne 5 : « Bon, alors là, je ne sais plus trop »), ce qui montre bien que l'élève n'avait pas initialement pris en compte l'intégralité des phrases proposées pour effectuer les différentes associations. Une fois que l'élève tient compte de la nécessité de lire l'ensemble de la phrase proposée, il revoit ses réponses et les corrige de lui-même.

A ce propos, il nous semble important de souligner que l'élève inverse le sens de sa démarche dès lors qu'il se rend compte de l'importance de lire l'ensemble des phrases proposées. En effet, lorsque l'élève s'intéresse à valider la réponse choisie pour l'expression B, il commence par analyser la phrase en français qu'il avait associée à cette expression (phrase 1) en se demandant si l'expression B lui correspond (ligne 5 : « inverse... déjà il y a un grand inverse »). Après s'être rendu compte que l'expression B ne correspond pas à la phrase 1, il cherche l'expression algébrique qui lui est associée. Une fois celle-ci trouvée (expression C), il revient sur l'examen de l'expression B, toutefois n'adoptant plus la démarche 1. Ici, plutôt que de chercher parmi les phrases en français proposées celle qu'il juge mieux traduire l'expression B, l'élève adopte entièrement la position d'auteur de cette expression, la traduisant de lui-même (ligne 7 : « l'inverse de la somme de a au carré plus b au carré . L'inverse de la somme du carré de a et b. ») et confronte sa réponse avec les phrases proposées dans la colonne de droite (ligne 7 : « Mais il n'y est pas là-dedans »).

[78] Nous verrons, par la suite, que ce n'est pas aussi simple que cela : lorsque l'élève doit résoudre seul l'exercice il semble adopter un démarche différente de celle qu'il adopte lors de l'entretien.
[79] Il est vrai que, pour cette question, l'élève n'a pas le choix entre plusieurs phrases où l'assembleur principal est en tête de phrase (comme il en est question, par exemple, pour la question 2), ce qui a pu induire l'élève à adopter une telle démarche.

Comme nous l'avons vu, la démarche adoptée par cet élève ne peut se caractériser unilatéralement (elle ne va ni purement de l'analyse vers la synthèse ni purement de la synthèse vers l'analyse). Parmi les trois démarches définies dans notre analyse *a priori*, celle-ci se rapproche le mieux de la démarche que nous avons nommée démarche 3, avec cependant une importante nuance : l'élève, à un moment donné, se déprend des phrases en français fournies par l'énoncé pour construire lui-même la traduction de l'expression algébrique en jeu, adoptant ainsi une démarche qui se veut propre à l'auteur –virtuel- de l'expression.

Arrêtons-nous à présent un instant sur cette démarche. A travers le discours de l'élève retranscrit ci-dessus, nous sommes capables de mieux cerner les différentes étapes de son raisonnement, ou plus exactement les différentes étapes de la « re-construction phrasée » de l'expression algébrique en jeu. Reprenons les termes de l'élève : « L'inverse de la somme de a au carré plus b au carré. L'inverse de la somme du carré de a et b ». Observons que la re-construction de l'expression, lorsque l'élève adopte la position d'auteur, ne traduit pas exactement la démarche théorique de l'auteur, en ce sens où l'élève n'attribue pas immédiatement les différents niveaux aux assembleurs associés. L'élève commence certes par traduire l'assembleur de plus haut niveau en langage naturel (« l'inverse »), mais la suite de sa traduction est encore fortement influencée par sa position de lecteur. En effet, lorsque l'élève aborde la suite de l'expression, sa traduction s'avère un mélange entre analyse et synthèse (« la somme de a au carré plus b au carré »). L'élève commence par traduire, dans une démarche d'auteur, l'assembleur de niveau deux (la somme), mais abandonne momentanément cette position pour traduire l'expression telle qu'il la lit (« a au carré plus b au carré »). Ce n'est que dans un second temps que l'élève homogénéise sa « position » et propose la phrase attendue en suivant le modèle des autres phrases proposées dans l'énoncé : « l'inverse de la somme du carré de a et b ».

Nous pouvons résumer l'analyse des réponses apportées par l'élève à cette première question comme suit. Les choix de l'élève semblent, dans un premier temps, reposer essentiellement sur la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau ; en d'autres mots, la phrase en français choisie pour décrire une expression donnée est systématiquement celle où figure en début de phrase le terme décrivant l'assembleur structurant de l'expression. Mais nous pensons que cette lecture partielle des phrases en français est plutôt due à la particularité de l'énoncé (il n'y a qu'une seule phrase commençant par « l'inverse », une seule commençant par « la somme », etc.) qu'à une faible maîtrise du symbolisme de la part de l'élève[80]. En effet, tout au long du dialogue, nous notons plusieurs éléments indiquant un bon rapport au symbolisme. Plus particulièrement, après la première intervention de l'observateur, lorsque l'élève examine ses propres réponses, il se montre être capable de critiquer ses associations en utilisant des arguments révélant d'une bonne maîtrise du symbolisme

[80] A ce propos, notons que l'élève a attribué à l'expression B (plutôt qu'à C) la phrase 1 qui commence par l' « inverse ». Ceci semble venir conforter notre hypothèse relative à la démarche qu'il emploie (analyse

(ligne 6 : « Parce que le carré de la somme ça veut dire que ce doit être ... Il doit y avoir une parenthèse »), et de produire les associations attendues pour chaque expression algébrique. Nous verrons, par la suite, que les réponses apportées par l'élève aux autres questions indiquent que ses choix ne sont aucunement aléatoires, comme l'on aurait pu penser en se tenant à ses premières réponses apportées à la question 1.

Question 2

Expression A

8 **O** *: Pour la première expression...*

9 **E** *: J'ai mis 2. Parce direct j'ai vu que c'était une somme. Pareil, il y avait le choix entre le 2 et le 3. Et après j'ai mis... Oui, parce qu'après il y avait des carrés. Donc c'est deux trucs où il y a des grands carrés. C'est-à-dire que c'est toute une expression avec un carré. C'est toute l'expression qui est mise au carré.*

10 **O** *: Qu'est-ce que tu entends par « toute l'expression » ?*

11 **E** *: C'est-à-dire a divisé par 3. Le tout au carré, et non pas a au carré divisé par 3. Donc c'est le 2.*

12 **O** *: Parce que ...*

13 **E** *: Parce que déjà il y a la somme, donc il y a le choix entre 2 et 3. Et après, parce que c'est des carrés, entre parenthèses, donc les carrés général, de toute l'expression a divisé par 3.*

Expression B

14 **E** : *Après le B j'ai mis 1 parce que c'était tout divisé par 3, donc c'était le tiers. Et après il y avait une somme de carrés. Donc c'était ça. Il n'y avait pas le choix.*

Expression C

15 **E** : *Donc le C... C'est l'autre tiers. Parce qu'il y a une expression... Toute l'expression est mise au carré, donc c'est le tiers du carré. Et la somme de a et b après.*

Expression D

16 **E** : *Et après le D c'est... la somme... des tiers... donc la somme. Donc deux expression mis... divisées par 3 avec un plus au milieu. Après il y a a au carré et b au carré.*

Commentaires

Observons tout d'abord que l'élève a associé correctement l'ensemble des expressions algébriques à leur traduction rhétorique, conformément au profil 2-1-4-3. Notons également que les différences de réussite entre cette question et la question précédente reflètent les mêmes différences de réussite observées parmi les réponses des élèves de la classe de $4^{ème}$.

---

successive des expressions algébriques) et indique que son choix se base uniquement sur le premier terme de la phrase en français.

En ce qui concerne la démarche adoptée par l'élève pour résoudre cette question, il est important de souligner que la description donnée par celui-ci doit être, à notre avis, interprétée avec une certaine précaution. Rappelons que l'élève ne s'était pas de lui-même rendu compte de l'importance de considérer toutes les phrases possibles où la traduction de l'assembleur de plus haut niveau figure en premier plan. Le discours tenu pour la question 2, dans lequel l'élève suggère avoir eu à choisir entre plusieurs phrases possibles, nous semble donc inévitablement biaisé par l'intervention de l'observateur faite au début de la discussion de la question 1, ce pourquoi il nous faut être vigilant quant aux conclusions issues de l'analyse de celui-ci. En particulier, nous pensons que lorsque l'élève affirme « Pareil, il y avait le choix entre le 2 et le 3 », il ne retrace point la démarche adoptée lors de la résolution de l'exercice, mais cherche plutôt à analyser son choix dans les termes de la discussion menée dans la question précédente[81].

Si la description fournie par l'élève ne nous semble pas correspondre exactement à la démarche adoptée lors de la résolution de l'exercice, elle nous paraît plutôt traduire une démarche de validation de ses réponses, dont le point de départ se caractérise le plus souvent par l'analyse des phrases en français. En effet, si l'élève commence par décrire la stratégie qu'il a employée pour résoudre la question (ligne 9 : « direct j'ai vu que c'était une somme »), il abandonne aussitôt ce point de vue, après un moment d'hésitation (« Pareil, il y avait le choix entre le 2 et le 3. Et après j'ai mis... ») et en vient à justifier l'association de cette expression à la phrase 2 en partant de l'analyse de la phrase en français (« Oui, parce qu'après il y avait des carrés. Donc c'est deux trucs où il y a des grands carrés »).

Ainsi, pour cette question, le discours tenu par l'élève sera analysé non plus en termes de démarche; nous nous intéresserons davantage à en dégager quelques indices du rapport de l'élève au symbolisme[82].

Observons tout d'abord que cet élève n'a aucune difficulté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau des expressions (ligne 9 : « Parce que direct j'ai vu que c'était une somme » , ligne 14 : « parce que c'était tout divisé par 3, donc c'était le tiers », ligne 16 : « Et après D c'est la somme… des tiers… donc la somme »).

Ensuite, l'analyse du discours de l'élève, et plus particulièrement de la description de sa lecture des phrases proposées en français, révèle un autre aspect important de son rapport au symbolisme : le caractère quasi-indissociable, pour l'élève, entre le combinatoire (non seulement relevant de la matérialité mais également de la syntaxe !) et le signifiant d'un signe. En effet, à travers son discours, il nous semble que bien souvent la lecture de la description des expressions algébriques

[81] Observons tout particulièrement qu'il utilise le mot « pareil », et semble par là même faire référence à la démarche adoptée pour analyser les expressions de la question précédente.

[82] Notons finalement que lorsque l'observateur demande à l'élève d'établir un bilan pour l'expression A (« parce que... »), celui-ci décrit une stratégie en tout point pareille à la démarche 1 décrite dans l'analyse *a priori* bien que celle-ci ne soit pas, à notre avis, la démarche réellement adoptée par l'élève.

exprimées en français ne peut se faire sans un renvoi constant à une représentation (mentale) des symboles en jeu dans l'expression.

En ce qui concerne l'expression A, lorsque l'élève justifie son choix pour la phrase 2 (La somme des carrés des tiers de *a* et *b*), il dit : « Oui, parce qu'après il y avait des carrés. Donc c'est deux trucs où il a des grands carrés ». Cette affirmation révèle deux informations, relatives aux deux différents assembleurs en jeu (la somme et le carré). D'une part, observons que l'élève semble avoir, mentalement, visualisé la syntaxe du signe relatif à la « somme », suggérant implicitement que celui-ci ouvre deux places autour de lui, en amont et en aval (ligne 9 : « c'est deux trucs (…) »)[83]. D'autre part, en ce qui concerne la lecture du « carré » (et plus précisément du carré du tiers), son explication se montre très rattachée à la représentation de celui-ci, notamment lorsqu'il affirme : « (…) il y a des grands carrés », suggérant (ligne 9 : « c'est-à-dire que c'est toute une expression avec un carré »), puis explicitant (ligne 11 : « c'est-à-dire a divisé par 3. Le tout au carré, et non pas a au carré divisé par 3 ») les parenthèses autour de l'ensemble de la fraction et pas seulement autour des éléments (numérateur ou dénominateur) de celle-ci[84]. Les parenthèses semblent par ailleurs jouer une rôle très spécifique pour cet élève et fonctionnent vraiment comme des instruments de pensée.

L'allusion à la syntaxe du signe correspondant à la somme est également repérable lorsque l'élève traite la phrase 3, associée à l'expression D et plus précisément lorsqu'il dit : « (...) donc la somme. Donc deux expressions mis... » (ligne 16). A nouveau, l'élève exprime implicitement le caractère binaire du signe, même si les arguments de la somme ne sont pas immédiatement explicités.

La lecture faite par l'élève de la phrase 3 se veut d'ailleurs très révélatrice de la re-construction, cette fois-ci analytique, de l'expression D à partir de sa traduction rhétorique. Elle semble en effet se faire en plusieurs étapes, toujours les mêmes, suggérant que la représentation mentale des symboles se révèle non seulement, comme nous l'avons caractérisée plus haut, constante, mais la construction de celle-ci se veut également progressive : pour chaque symbole lu, un symbole est représenté mentalement[85]. En effet, l'élève ne traite pas l'intégralité de la phrase (ligne 16 : « c'est la somme... des tiers... donc la somme. ») et semble avoir besoin, pour poursuivre sa lecture, de représenter l'assembleur principal et ses arguments (« Donc la somme. Donc deux expressions mis... »). Une fois les assembleurs de niveau 3 et 2 déterminés (même si ce dernier est une simple ébauche : « deux expressions »), l'élève est capable de saisir l'allure générale de l'expression algébrique, partant de l'assembleur de niveau 2 («... divisées par 3 ») et rappelant l'assembleur principal (« avec un plus au milieu »). En dernier lieu, l'élève traite l'assembleur de niveau 1, qui semble venir comme accessoire dans la composition de l'expression algébrique (« après il y a a au carré et b au carré ») dont le dessin général paraît pour lui tout à fait clair.

[83] Cette représentation mentale de la syntaxe du signe viendra se confirmer lors de l'analyse de la question 3.

[84] A travers cette description, l'élève semble faire allusion aux différences entre les expressions B et C.

[85] Un démarche qui ne se veut pas unilatérale : l'édification de l'expression algébrique se révèle le produit d'un constant aller-retour entre la phrase rhétorique et les composantes de l'expression algébrique progressivement assemblées.

<u>Question 3</u>

<u>Expression A</u>

17 **E** : *Donc A... Déjà c'est l'inverse... L'inverse de ... de a fois ... du produit de a et b. Donc c'est...* [L'élève s'aperçoit qu'il a commis une faute –il a associé la phrase 2 à l'expression A- et écrit la phrase attendue correspondante à cette expression dans le rectangle prévu à cet effet].

<u>Expression B</u>

18 **E** : *Par contre, là c'est bon* [se réfère au fait de lui avoir associé la phrase 2].

19 **O** : *Alors, est-ce que c'est bon ? ... Bon, l'inverse, c'est bon... Mais on va regarder de plus près le dénominateur. Ca doit correspondre à quoi dans la phrase si tu dis que ça correspond bien au numéro 2 ? Le dénominateur doit correspondre à quoi ?*

20 **E** : *Produit... Donc moins a fois moins b.*

21 **O** : *Et ça* [se réfère au dénominateur de l'expression B] *c'est quoi exactement ? C'est le produit...*

22 **E** : *Le produit des opposés.*

23 **O** : *Le produit des opposés. Est-ce que ce c'est ce qui est écrit ici, moins a moins b... Parce que tu m'as dit : le produit des opposés c'est moins a fois moins b. Mais est-ce que c'est ce qui est écrit...*

24 **E** : *Ah, non, c'est la somme des opposés.*

25 **O** : *Qu'est-ce qu'il aurait fallu mettre sur l'expression B pour que ça corresponde...*

26 **E** : *Des parenthèses comme ça* [L'élève dessine des parenthèses autour de $-a$ et autour de $-b$]

<u>Expression C</u>

27 **E** : *Le petit C, c'est le seul direct où il y a un opposé. Donc déjà direct il y a un opposé. Et c'est l'inverse du produit de a et b.*

Ensuite l'élève décrit comment il procède en partant en sens inverse, c'est-à-dire, à partir des phrases 1 et 3, pour retrouver l'expression algébrique correspondante.

28 **E :** *L'opposé de l'inverse du produit de a et b. Ca serait l'opposé, donc déjà il y a un moins* [L'élève écrit le signe négatif sur sa feuille]... *De l'inverse du produit de a et b... Donc un sur a fois b.* [L'élève écrit $-\dfrac{1}{a \times b}$].

L'autre c'est l'opposé du produit des inverses de a et b. Donc moins un sur a fois un sur b. [L'élève écrit $-\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$ et s'aperçoit que les deux expressions sont équivalentes]

Commentaires

La résolution de cette question s'est faite moins aisément que celle des deux questions précédentes. Non seulement le nombre d'erreurs commises par l'élève a été plus important (deux associations incorrectes sur l'ensemble des expressions), mais il lui a fallu plus de temps pour rectifier ses réponses (et en particulier pour analyser la réponse apportée à la seconde expression) que lors des dialogues précédents. Observons que la difficulté relative à l'expression B confirme, d'une part, nos hypothèses *a priori* concernant la complexité de la tâche et d'autre part semble correspondre aux réponses apportées par les élèves de la classe de 4$^{\text{ème}}$.

Lors de la discussion menée par l'observateur, l'élève commence par traiter l'expression A, partant de son écriture algébrique pour trouver la phrase en français qui lui correspond. A nouveau, à travers son dialogue, l'élève montre être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau (ligne 17 : « Déjà c'est l'inverse »), cependant semble avoir privilégié la phrase proposée dans la colonne de droite commençant par l'assembleur structurant de l'expression (phrase 2). C'est en traduisant directement l'expression A que l'élève s'aperçoit de l'erreur commise et écrit de lui-même la phrase attendue dans le rectangle libellé « Autre (s)». Cette première phase de la discussion se veut par ailleurs révélatrice quant à la démarche analytique adoptée par l'élève et décrit pour la première fois de façon évidente le changement de sa position de lecteur à celle d'auteur de l'expression algébrique, à travers une « traduction simultanée » de celle-ci en français. Après avoir considéré l'assembleur de plus haut niveau de l'expression (ligne 17 : « déjà c'est l'inverse... L'inverse de... »), l'élève entreprend une lecture linéaire de l'expression (« (...) de a fois... ») en rectifiant aussitôt sa traduction dans les termes attendus (« ...du produit de a et b »).

A travers la discussion menée autour de la réponse apportée par l'élève à l'expression B, nous retrouvons l'erreur prévue dans notre analyse *a priori*, i.e. l'interprétation de « *-a-b* » en tant que produit des opposés de *a* et *b* (ligne 21 : O :« Et ça [se réfère au dénominateur de l'expression B] c'est quoi exactement ? C'est le produit... », ligne 22 : E :« Le produit des opposés »). Après l'intervention de l'observateur, l'élève rectifie sa réponse et choisit une expression où figure le terme « opposés », en reconnaissant dans « *-a-b* » la somme des opposés de *a* et *b* (ligne 24 : « Ah, non, c'est la somme des opposés »). Guidé par l'observateur, l'élève reconnaît la subtile différence entre la somme et le produit des opposés, déterminée par l'élision ou la présence, respectivement, des parenthèses (ligne 25 : O : « Qu'est ce-qu'il aurait fallu mettre sur l'expression B pour que ça corresponde... », ligne 26 : E : « des parenthèses comme ça »).

L'association de l'expression C à sa phrase en français se fait plus aisément ; l'examen visuel de l'expression algébrique semble en effet plus évident pour l'élève. Bien que le signe «- » soit rattaché au numérateur de la fraction et ne précède pas directement le trait de fraction, c'est ce signe qui est immédiatement reconnu par l'élève (ligne 27 : « c'est le seul direct où il y a un opposé. Donc déjà direct il y a un opposé »). La répétition de la phrase de l'élève semble indiquer de sa part une nécessité de « mettre de côté », mentalement, ce premier assembleur afin de pouvoir poursuivre l'examen de l'expression (« Et c'est l'inverse du produit de a et b »). Ceci vient étayer nos propos tenus précédemment quant à l'examen successif et progressif des assembleurs, partant cette fois-ci de l'expression algébrique donnée.

Finalement, la fin du dialogue échangé nous fournit un nouvel exemple de la démarche de re-construction des expressions algébriques à partir de la lecture de leur traduction rhétorique. Bien que l'élève ait choisi la phrase 1 pour traduire l'expression C, la lecture de cette phrase se passe comme s'il ne l'avait pas encore traitée. Elle se fait, comme pour la lecture des phrases rhétoriques précédemment analysées par l'élève, à travers l'examen et la représentation (cette fois-ci explicite) de chaque assembleur. Notons que, une fois l'assembleur principal de la phrase 1 représenté, l'élève traite la suite de la phrase (l'inverse du produit de *a* et *b*) en procédant à une traduction intermédiaire entre la phrase fournie par l'énoncé (l'inverse du produit de *a* et *b*) et la représentation symbolique de celle-ci. En effet, l'élève semble avoir besoin de traduire la phrase fournie dans des termes qui lui sont plus familiers correspondant par ailleurs à une lecture linéaire de l'expression algébrique : « De l'inverse du produit de a et b... Donc un sur a fois b » (ligne 28).

Après avoir analysé les réponses des élèves apportées au premier exercice, examinons à présent les productions relatives au second exercice. Nous avons choisi, pour cet exercice également, de présenter, dans une première partie, l'ensemble des résultats des analyses des productions écrites des élèves de la classe de 4ème, suivie de la transcription de l'entretien individuel relatif à ce même exercice.

Exercice 2 – Productions écrites

Question a

Le taux de réussite à cette question est très élevé : 25 élèves sur 27 y ont répondu correctement, confirmant nos hypothèses soulevées dans l'analyse *a priori*.

Questions b et c

L'analyse *a priori* de ces questions suggérait une diversité dans la méthode employée par les élèves pour y répondre. Les productions recueillies ont montré que certains élèves ont effectivement eu recours à des dessins tandis que d'autres justifiaient leurs réponses à l'aide de calculs. Nous résumons ci-après les données recueillies.

Question b :

Juste (16)				Faux (9)			Ss rép.
J. ss d/ss c	J. avec c	J. avec d et c	J. avec d	F. ss d/ss c	F. avec c	F. avec d	
9	4	2	1	7	1	1	2

Question c :

Juste (14)		Faux (12)			Ss rép.
J. ss d/ss c	J. avec c	F. ss d/ss c	F. avec c	F. avec d	
7	7	8	3	1	1

Légende :
ss d/ ss c : sans dessin ni calcul
avec d : avec dessin uniquement
avec c : avec calcul uniquement
avec d et c : avec dessin et calcul.
Observons que par « calcul », nous entendons également l'explicitation de multiplications (une réponse telle 11x9 pour la question (b) serait ainsi classée en tant que J avec c).

A partir de l'examen des deux tableaux précédents, quelques informations se dégagent.

Observons tout d'abord que les taux de réussite aux question b et c sont nettement moins élevés que celui relatif à la question précédente, n'excédant guère la moyenne (respectivement 16 et 14 sur 27). Notons également que la plupart des réponses ont été données sans aucune justification, y compris les réponses incorrectes. Plus particulièrement, nous nous retrouvons face à un bon nombre de réponses incorrectes sans calcul ni dessin, toutes différentes les unes des autres, ne nous permettant pas de leur attribuer de catégories particulières.

Finalement, nous observons que le taux de réussite à la question b est très proche de celui de la question c.

Quant à la méthode employée, nous notons que le nombre d'élèves ayant eu recours à un dessin pour répondre à la question c est nettement moins élevé que celui relatif à la question b : en effet, seul un élève a ébauché un croquis pour représenter la tablette 20x17. Comme nous l'avons souligné lors de l'analyse *a priori,* ceci peut, d'une part, indiquer que les élèves auraient compris le modèle « général » de figure à travers l'examen de la question précédente (n'éprouvant donc plus le besoin d'avoir recours au dessin) ou, d'autre part, peut suggérer que la taille de la tablette les aurait découragé de la représenter.

Question d

Nous avons souligné, dans l'analyse *a priori,* que deux compétences de nature différente sont en jeu dans la résolution de cette question. En effet, si pour apporter la réponse attendue il est nécessaire, d'une part, de reconnaître la relation entre le nombre de pépites et de noisettes que contient une tablette quelconque, il faut, d'autre part, pouvoir exprimer ladite relation (en ayant notamment recours à des formules rhétoriques ou algébriques). Les réponses des élèves apportées aux questions précédentes indiquent que 14 élèves semblent avoir reconnu la relation entre pépites et noisettes contenues dans les tablettes en jeu dans les questions b et c[86]. D'après les productions recueillies relatives à cette question, nous notons que 10 élèves décrivent cette relation, par différents moyens[87]. Ces informations semblent venir confirmer nos observations *a priori* traduisant l'indépendance des deux compétences en jeu dans cette question.

Examinons à présent les différents modes employés dans la description faite par les élèves et intéressons-nous, dans un premier temps, à distinguer les élèves ayant fait usage de lettres dans leur description de ceux n'y ayant pas eu recours. Voici un tableau résumant les données recueillies.

Présence de lettres	Absence de lettres	ss rép.
1	17	9

Comme l'indique le tableau, un seul élève a fait usage de lettres pour décrire la formule donnant le nombre de pépites d'une tablette. Il a en effet distingué, au moyen de lettres différentes (*a* et *b*), la longueur et la largeur d'une tablette. Il ne parle cependant pas du « nombre de noisettes », mais de longueur et largeur d'une tablette et explicite la formule attendue: (a-1)x(b-1).

Avant d'amorcer l'analyse des productions, majoritaires, des élèves n'ayant pas eu recours aux lettres pour décrire la formule, quelques commentaires s'imposent.

Rappelons qu'une formule exprimant la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites contenues dans une tablette de chocolat à partir du nombre de noisettes donné est: $(x-1)\text{x}(y-1)$, où x et y représentent le nombre de noisettes en longueur et en largeur d'une tablette. Deux informations sont en jeu dans cette formule et, quelle que soit la façon choisie par l'élève pour exprimer celle-ci, elles doivent figurer dans la description employée. Plus exactement, les deux informations dont il s'agit sont : le rapport, pour chaque rangée de noisettes, entre noisettes et pépites (pour x noisettes, il y a x-1 pépites) et le processus permettant d'obtenir, au final, le nombre total de pépites (la multiplication). L'analyse des productions recueillies a montré que les deux informations révélées par la formule étaient bien souvent exprimées de façons différentes chez un même élève et, plus particulièrement, que tandis que le rapport entre noisettes et pépites était souvent exprimé entièrement en français, la multiplication était, quand il y avait lieu, évoquée à travers un exemple précis.

[86] Ces élèves correspondent à ceux ayant apporté les réponses attendues aux questions b et c.
[87] Nous reviendrons par la suite sur l'analyse détaillée des réponses fournies par les élèves, reproduites en annexe dans leur intégralité. Notons cependant déjà que cet effectif correspond aux neuf élèves rassemblés dans la catégorie « deux informations » du tableau présenté ci-après, auxquels s'ajoute l'élève dont la réponse est notée 26.

En prenant en compte cette analyse, nous avons regroupé les données recueillies dans le tableau suivant, commenté par la suite :

<table>
<tr><th colspan="3">Raisonnement sur tablette quelconque (10)</th><th>Raisonnement sur un exemple (1)</th><th>autre (6)</th><th>ss rép. (9)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Deux informations[88]</td><td>Une information[89]</td><td rowspan="3">fcais/chiffre/s.o. :**1**[90]</td><td rowspan="3">**6** [91]</td><td rowspan="3">**9** [92]</td></tr>
<tr><td>Exprimées dans même registre</td><td>rapport : français; multiplication : ex. numérique</td><td rowspan="2">- Français :**1**[93]
- Français/ symboles opératoires : **1**[94]</td></tr>
<tr><td>-Français: **2**[95]
-fcais/chiffres : **3** [96]
formule lit.: **1** [97]</td><td>**3**[98]</td></tr>
</table>

L'écrasante majorité des élèves ayant répondu à cette question (17 élèves) ont essayé de décrire, en français, la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites à partir du nombre de noisettes. Sur cette majorité, plus de la moitié (10 élèves) ont décrit, d'une façon ou d'une autre, la structure d'une tablette, en prenant en compte les deux informations évoquées précédemment, comme le montre par exemple cette réponse d'élève : « Oui, il suffit de rajouter 1 au nombre de la longueur et au nombre de la largeur et de multiplier les deux nombres ensembles ». Parmi les élèves ayant décelé la structure d'une tablette, cinq se sont servi d'un exemple particulier[99] ; les autres se sont contentés d'une description entièrement en français (mis à part quelques symboles chiffrés). Il est par ailleurs important de souligner que, bien que quelques élèves semblent éprouver des difficultés à décrire en français le processus qui permet de trouver le nombre de pépites, on retrouve quelques explications irréprochables, telle : « On peut connaître le nombre de pépite en soustrayan [sic] un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble ».

Observons également que nous ne retrouvons, parmi les productions recueillies, aucune description intermédiaire entre le rhétorique et le symbolique, un cas de figure envisagé comme majoritaire lors de l'analyse *a priori*. Les élèves ont en effet choisi de décrire la structure de la tablette entièrement en français, même si celle-ci nous a paru, *a priori*, trop fastidieuse pour être adoptée par la plupart des élèves.

---

88 Cette catégorie correspond aux élèves qui décrivent la formule dans son intégralité, c'est-à-dire qui prennent en compte les deux informations évoquées plus haut : le rapport entre noisettes et pépites et la multiplication.

89 Dans cette catégorie, nous retrouvons les élèves faisant uniquement allusion au rapport existant entre les noisettes et les pépites et n'évoquant pas la multiplication dans sa description.

90 Correspond à la réponse notée 26

91 Correspond aux réponses notées 5, 6, 20, 21, 24 et 25. Elles ne nous permettent pas de savoir si les élèves ont saisi, ou non, le modèle général de construction de chaque tablette.

92 Correspond aux réponses notées 4, 8, 10, 14, 15, 18, 22, 23 et 27

93 Correspond à la réponse notée 2

94 Correspond à la réponse notée 7

95 Correspondent aux réponses notées 1 et 17

96 Correspond à la réponse notée 9, 13 et 16

97 Correspond à la réponse notée 12

98 Correspondent aux réponses notées 3, 11 et 19

Nous pouvons dire finalement que les productions des élèves ont confirmé l'hypothèse issue de l'examen *a priori* de cette question : il n'est pas suffisant d'avoir trouvé la relation entre le nombre de noisettes et de pépites pour répondre correctement à cette question, encore faut-il savoir l'exprimer. Dans ce sens, et comme le notait déjà C. Kieran, pour raisonner algébriquement il n'est pas suffisant de percevoir le général à partir du particulier, il faut également être capable de l'exprimer algébriquement[100].

Question e

Cette question a été abordée par un plus grand nombre d'élèves que la question précédente, mais le taux d'échec y est supérieur. Sur 23 élèves ayant répondu à cette question, 13 ont répondu incorrectement, la plupart sans justification.

Voici le résultat quantitatif des analyses :

Juste (10)			**Faux (13)**		**Ss rép.**
8x2 ss just.	8x2 avec just.	oui ss préciser	F. ss just	F. avec just	
8	1	1	7	6	4

Précisons tout d'abord que tous les élèves ayant répondu qu'il n'est pas possible de trouver une tablette contenant 7 pépites et ayant justifié cette affirmation ont cherché une relation entre le nombre sept et les nombres pairs ou premiers. L'entretien que nous avons eu avec l'élève de 4ème et dont la transcription est fournie ci-après, se révèle sur ce point très illustratif. En effet, pour résoudre cette question, il s'agit de décomposer le nombre de pépites en produit de deux facteurs, qui serviront à déterminer les dimensions de la tablette recherchée. Or, d'après les productions d'élèves et d'après l'entretien mené, les élèves semblent avoir du mal à décomposer le nombre 7 en produit de deux facteurs (bien que le premier exemple de tablette fourni dans l'énoncé ne contienne qu'une pépite), puisqu'il ne présente aucun diviseur propre différent de 1. Peut-être aurions-nous eu un taux plus élevé de réussite si le nombre n'était pas premier.

Il nous semble ensuite intéressant d'établir un lien entre les réponses apportées à la question précédente et celles relatives à celle-ci. Comme nous l'avions précisé dans l'analyse *a priori* de cette tâche, il s'agissait d'examiner, à travers cette dernière question, si les élèves semblant avoir saisi la structure d'une tablette réinvestissaient cette « connaissance » lors de la résolution de la question e. Plus précisément, nous avons émis l'hypothèse, d'une part, que les élèves n'ayant pas montré (à travers leur réponses aux questions précédentes) avoir compris la structure générale d'une tablette ne seraient pas en mesure de répondre correctement à cette question et, d'autre part, que les élèves ayant décrit la relation noisettes/pépites sous forme algébrique seraient plus susceptibles de fournir la

[99] Ce sont les élèves dont les réponses sont notées 1, 3, 11, 19 et 26.

réponse attendue étant donné que la question de divisibilité du nombre de pépites est davantage explicite dans la formule algébrique. D'après les réponses fournies par les élèves à la question d, nous supposons que 10 élèves ont « compris » la structure d'une tablette[101]. Sur ces 10 élèves, les réponses à la question e se révèlent assez mitigées. Six élèves y répondent correctement contre 4 élèves qui répondent incorrectement (en évoquant, notamment, que le nombre 7 n'est pas pair). Observons par ailleurs que le seul élève ayant fourni la formule littérale à la question d a répondu correctement à la question e.

Exercice 2 – Entretien

29 **E** : *Donc pour le petit a, il suffisait de compter, au fait.*

30 **O** : *Combien as-tu trouvé pour la première tablette ?*

31 **E** : *Ben, un. Après deux, et après huit.*

32 **E :** A*lors après je me suis rendu compte que le nombre de pépites c'était toujours... hm... largeur moins un fois longueur moins un. Donc dans une tablette de onze fois neuf il y a dix fois huit pépites, c'est-à-dire quatre-vingt.*

//

[l'élève explique comment il a procédé pour répondre aux questions b et c]

33 **E** *: J'ai fait un dessin, et puis c'est après que je me suis rendu compte ... Et puis après, une fois qu'on connaît le truc, vingt fois dix-sept ça fait dix-neuf fois seize, on reprend la calculette et ça donne trois cent quatre.*

//

34 **E** : *J'ai mis oui* [L'élève se réfère à la question d], *une tablette x fois y contient x moins un entre parenthèses fois entre parenthèses y moins un.*

35 **O** : *Pourquoi as-tu mis des lettres ?*

36 **E** : *Ben, parce que c'est... euh... on doit... On devrait le prouver dans une généralité. Sinon on ne prouve rien... On ne peut pas...*

//

37 **E** : *Non, ce n'est pas possible* [se réfère à la question e] *parce que sept c'est un nombre premier.*

38 **O** : *Et alors ?*

39 **E** : *Et donc on ne peut pas le... on ne peut pas le multiplier. Il n'y a aucune multiplication qui donne sept. On ne peut pas diviser sept pour aller trouver un nombre entier. Et donc on ne peut pas faire mon truc...*

---

[100] Elle va plus loin en affirmant que non seulement le processus de généralisation n'est pas équivalent au raisonnement algébrique, mais qu'il ne requiert même pas de l'algèbre.

[101] Ce sont les élèves auteurs des réponses 1, 3, 9, 11, 12, 13, 17, 19 et 26 en annexe.

40 **O** : *Il n'y a pas de tablette qui contienne sept pépites ?*

41 **E** : *Non, pas de tablette de ce type là.*

42 **O** : *Et celle-ci* [se réfère à la tablette 3x2], *elle contient combien ?*

43 **E** : *Deux. Oui, deux c'est un nombre premier* [rires] *mais c'est pas pareil.*

44 **O** : *Qu'est-ce qui n'est pas pareil ?*

45 **E** : *Ben, un et deux c'est des premiers.*

46 **O** : *Un n'est pas premier.*

[Discussion autour des premiers]

47 **O** : *Et tu ne parviendrais pas à dessiner une tablette qui contienne sept pépites ?*

48 **E** : *Mais non. Sept ce n'est pas possible.*

49 **O** : *Pourquoi ?*

50 **E** : *Déjà il y a huit. Et après huit, on essaye un petit peu plus bas. Quatre fois trois ça ne marche pas. Parce que quatre fois trois il y aura six pépites et sinon on peut essayer ... euh ... cinq fois deux. Et donc ça ne va pas. Tous ceux qui sont autour ça fait six, quatre, mais pas sept. Cinq c'est pareil. Onze aussi... Tous les premiers à part deux.*

51 **O** : *Toi tu es en train de regarder ce genre de tablette* [se réfère à 5x3]. *Et dans ce genre de tablette-ci* [se réfère à 3x2]?

52 **E** : *Si on multiplie par deux, si on fait une tablette de six fois quatre... Il y aura ... euh ... quinze pépites. C'est ça ?*

53 **O** : *Oui. Et pourquoi six fois quatre ?*

54 **E** : *Parce que c'est le double... Donc c'est le même type de tablette.*

55 **O** : *D'accord. Et entre celle-ci et...*

56 **E** : [interrompt] A*h, ben si c'est possible ! Si on agrandit en longueur à chaque fois, on peut obtenir tous les nombres... Si on fait une tablette longue et pas large.*

57 **O** : *Donc c'est bien possible.*

58 **E** : *Oui. Mais bon, ça fait une tablette bizarre, quand même.*

Commentaires

De façon analogue au premier exercice, les réponses que l'élève a apportées à l'exercice 2 s'avèrent très illustratives des productions recueillies auprès de la classe de 4ème, venant par ailleurs confirmer la plupart des hypothèses dégagées lors de l'analyse *a priori* de cette question. Observons toutefois que les similitudes repérées entre les réponses fournies par l'élève et celles données par la classe de 4ème sont plutôt relatives aux démarches effectuées et aux justifications employées et moins relatives à la réussite de chaque question. Nous verrons, en effet, que l'élève auprès duquel nous avons mené l'entretien montre avoir un rapport au symbolisme plus solide que la plupart des élèves de la classe de 4ème, celui-ci se distinguant par ailleurs des élèves de son niveau. Ainsi, l'accent de notre analyse sera davantage mis sur les procédés utilisés par l'élève –que nous comparerons alors avec ceux que révèlent les productions écrites- que sur les réponses effectivement apportées.

La première question de l'exercice a été traitée comme nous l'avions attendu : l'élève procède à un simple comptage et répond correctement sans hésiter.

La suite immédiate du dialogue semble indiquer que la résolution de la question (a) aurait suffi à l'élève pour saisir le mode de construction d'une tablette quelconque et pour répondre à la question suivante (ligne 32 : « Alors après je me suis rendu compte que le nombre de pépites c'était toujours... hm... largeur moins un fois longueur moins un. Donc dans une tablette de onze fois neuf il y a dix fois huit pépites, c'est-à-dire quatre-vingt. »). Or ceci ne correspond pas tout à fait à la démarche employée par l'élève, qui semble retenir dans son discours uniquement les éléments nécessaires à la résolution de la suite de l'exercice. En effet, après que l'observateur lui ait demandé d'expliciter la démarche utilisée dans la résolution des questions b et c, l'élève précise une étape indispensable dans le processus de généralisation : le recours au dessin (ligne 33 : « j'ai fait un dessin, et puis c'est après que je me suis rendu compte...(...) »). Similairement à quelques élèves de la classe de 4ème, il lui a fallu représenter une partie de la tablette 11x 9[102] afin de saisir le lien entre le nombre de noisettes et de pépites que contient une tablette ou, comme il le dit, afin de percevoir le « truc » à appliquer (ligne 33).

Bien que la relation entre pépites et noisettes ait été trouvée après la résolution de la question portant sur une tablette spécifique (la tablette 11x9), la façon dont l'élève décrit la formule indique le caractère général que l'élève lui attribue (ligne 32 : « (...) le nombre de pépites c'était **toujours**... hm...largeur moins un fois longueur moins un »). Observons par ailleurs que l'expression que l'élève emploie pour faire référence à cette formule (« le truc ») et qu'il reprend par la suite (ligne 39), semble venir confirmer, entre autres choses, le caractère général de la relation[103]. Ainsi, pour résoudre la question c, il suffit à l'élève d'appliquer cette formule, perçue comme générale, à la tablette 20x17 (ligne 33 : « une fois qu'on connaît le truc, vingt fois dix-sept ça fait dix-neuf fois seize[104], on reprend la calculette et ça donne trois cent quatre »).

La suite de l'entretien porte sur la résolution des questions d et e, les échanges relatifs à cette dernière constituant la plupart du dialogue.

[102] L'élève a dessiné le semi-périmètre de la tablette ainsi que les premières rangées de pépites, en longueur et en largeur, sous le semi-périmètre.

[103] Il y a, également, derrière le terme « truc » employé par l'élève, l'idée d' « astuce ». L'élève semble avoir, à ce propos, une sorte de vision platonique du mode générateur de chaque tablette, comme si le mode de construction de la tablette était intrinsèque à chaque tablette, toujours là, et qu'il suffisait de le découvrir. On retrouve d'ailleurs cette idée plus loin dans le dialogue, lorsque l'élève répond à la question d : « (...) une fois qu'on connaît le truc, vingt fois dix-sept ça fait dix-neuf fois seize » (ligne 33).

[104] Observons que si, pour la question b, l'élève utilise une phrase rigoureusement construite : « dans une tablette 11x9 il y a 10x8 pépites, c'est-à-dire 80 », ici l'élève emploie une expression raccourcie : « 20x17 ça fait 19x16 ». On retrouve d'ailleurs cette économie d'expression parmi plusieurs productions écrites, dans lesquelles figure souvent l'expression du type : « 20x17 = 19x16 », où le signe d'égalité acquiert un statut d'équivalence au sens large du terme.

L'objet de la question d est d'expliciter la relation entre le nombre de noisettes et de pépites que contient une tablette de chocolat, celle-ci étant repérée par l'élève dès la résolution de la question b. Bien que la première explicitation, orale, de cette formule soit entièrement faite en français (ligne 32 : « le nombre de pépites c'était toujours largeur moins un fois longueur moins un »), l'élève ne se contente pas de cette formulation rhétorique et répond à la question d en employant désormais des lettres[105]. Contrairement à la majorité des élèves de la classe de 4ème, il introduit des lettres pour désigner le nombre de noisettes en longueur et en largeur et produit la formule attendue : (x-1)x(y-1). L'emploi de lettres dans l'explicitation de la formule semble très naturel pour cet élève qui montre un certain désarroi face à la question de l'observateur : « O : Pourquoi as-tu mis des lettres ? » (ligne 35) E : « Ben, parce que c'est... euh... on doit... » (ligne 36).

Notons que l'élève attribue à l'usage de lettres deux fonctionnalités distinctes, cependant intimement liées dans son discours :« prouver dans une généralité » (ligne 36). La première, cependant moins importante, et qu'il abandonnera dans la suite de son discours, évoque la notion de généralité ; il choisit x et y pour représenter, respectivement, le nombre quelconque inconnu de noisettes en longueur et en largeur d'une tablette quelconque[106]. La seconde notion à laquelle l'élève fait appel pour justifier l'usage de lettres et qui semble être, pour lui, essentielle dans l'expression de la formule, est la notion de preuve. Bien qu'aucune démonstration ne soit en jeu dans cette question (il s'agit d'*exprimer* une relation), l'élève interprète la question en termes de preuve (« on doit... on devrait prouver (...) ») et explicite le rôle que jouent, pour lui, les lettres : un outil indispensable à la démonstration (ligne 36 : « sinon on ne prouve rien... On ne peut pas... »). Ainsi, pour cet élève, décrire le processus de calcul qui permet de trouver le nombre de pépites à partir du nombre de noisettes tel qu'il a fait oralement (et tel que l'ont fait la plupart des élèves de la classe de 4ème) est non seulement insuffisant, mais ne paraît surtout pas valide mathématiquement. Son argumentation, qu'il énonce de façon catégorique (« sinon on ne prouve rien »), est pour le moins inattendue pour un élève de 4ème et confirme le niveau avancé de son rapport au symbolisme, repéré par ailleurs. En effet, comme le montrent les travaux didactiques, l'apprentissage de la démonstration dans la scolarité française est essentiellement centré sur la géométrie, les lettres ayant en algèbre majoritairement un statut d'inconnue. Il est ainsi étonnant de voir un élève de 4ème attribuer aux lettres, dans un contexte algébrique, un statut de nombre généralisé, et de rattacher à celles-ci la notion de preuve.

Finalement, il est intéressant de noter que l'élève a choisi les lettres x et y pour représenter le nombre de noisettes d'une tablette quelconque. Ce choix, qui n'est pas, à nos yeux, entièrement livré au hasard, semble traduire le contexte dans lequel les lettres figurent le plus souvent en classe de 4ème : celui relatif à la détermination de la valeur d'une quantité inconnue. Similairement aux premiers

[105] Si l'expression orale de la relation entre noisettes et pépites (ligne 32) décourage l'usage de lettres, nous verrons que l'emploi de lettres dans la description de la formule n'est pas uniquement motivé par la nécessité de rédaction de la formule (ce que montrent d'ailleurs la plupart des productions écrites des élèves de la classe de 4ème).
[106] Nous reviendrons sur ce choix par la suite.

usages que révèlent les analyses historique et épistémologique des lettres dans les écrits mathématiques, l'introduction des ces dernières se fait bien souvent pour les élèves au travers de problèmes relevant du registre de l'inconnu, constituant ainsi pour eux le champ d'application le plus immédiat. C'est en effet en classe de 4ème que sont abordées les premières mises en équation, dans lesquelles les lettres *x* et *y* sont le plus souvent employées. Il n'est donc pas surprenant que l'élève ait choisi, pour représenter le nombre de noisettes d'une tablette quelconque, les lettres qui lui étaient plus familières[107].

La suite du dialogue est relative à la résolution de la dernière question de l'exercice, qui propose une réflexion en sens inverse et pour laquelle il s'agit de déterminer le type de tablette de chocolat contenant un nombre de pépites donné, c'est-à-dire de trouver le nombre de noisettes en longueur et en largeur d'une telle tablette.

Comme nous l'avons souligné dans notre analyse *a priori*, si pour répondre à la question précédente, il était suffisant d'avoir trouvé la relation (sans l'avoir nécessairement explicitée) entre le nombre de pépites et de noisettes d'une tablette quelconque, pour répondre correctement à la question e, l'élève doit, en revanche, percevoir la relation sous le prisme de la divisibilité. Adopter ce nouveau point de vue ne semble cependant pas poser de problèmes à l'élève de 4ème qui, immédiatement, traduit la question en termes de multiplication d'entiers (lignes 37 à 39). Cependant, tout au long du dialogue, l'élève est freiné par la nature du nombre de pépites proposé dans l'énoncé (sept), ce qui l'empêche de répondre correctement à la question (ligne 37 : « non, ce n'est pas possible parce que sept c'est un nombre premier »). Plus précisément, l'élève semble ne retenir qu'une part de la définition des nombres premiers (à savoir qu'aucun entier ne divise un nombre premier), laissant de côté une information essentielle : la divisibilité du nombre premier par lui-même et par un. Ainsi, lorsque l'élève cherche, à juste titre, deux entiers a et b tels que axb=7, en ne considérant qu'une partie de la définition, il se retrouve très tôt devant l'impossibilité : « (...) il n'y a aucune multiplication qui donne sept (...) Et donc on ne peut pas faire mon truc » (ligne 39). L'élève, à ce stade, semble entièrement convaincu de l'impossibilité de construction d'une tablette contenant un nombre premier de pépites, son argumentation illustrant par ailleurs la majorité des réponses recueillies auprès des élèves de la classe de 4ème.

L'entretien se poursuit alors de façon à déstabiliser l'élève et d'exposer les fragilités de sa conviction. Cependant, même après que l'observateur lui ait exhibé un contre-exemple (la tablette contenant deux pépites), d'ailleurs perçu par l'élève comme tel (ligne 42 : « oui, deux c'est un nombre premier »), l'élève ne remet pas son affirmation en cause, préférant attribuer l'origine du contre-exemple à la particularité du nombre deux (éventuellement liée au fait que ce soit le seul nombre premier pair) : « oui (...), mais c'est pas pareil » (ligne 42). Le registre dans lequel était traitée la question change alors : si, dès le début, la résolution du problème s'était posée dans le registre

[107] Ce choix est par ailleurs majoritaire parmi les élèves de 2nde ayant eu recours à des lettres pour exprimer la relation entre pépites et noisettes.

algébrique, l'observateur tente de contourner l'allusion aux nombres premiers et reformule la question dans le registre géométrique: « Et tu ne parviendrais pas à dessiner une tablette qui contienne sept pépites ? » (ligne 46).

L'argumentation de l'élève, qui continue à croire qu'il n'existe pas de tablettes contenant sept pépites, prend désormais une autre direction. A la question posée par l'observateur, l'élève tente de répondre par approximations ou, suggérera-t-il, par encadrements (ligne 49 : « tous ceux qui sont **autour** »). Il commence en effet par considérer la tablette fournie dans l'énoncé contenant huit pépites, résultat considéré comme acquis (ligne 49 : « Déjà il y a huit »). Pour procéder aux différentes approximations du nombre de pépites, l'élève va faire varier le nombre de noisettes en longueur et en largeur de cette tablette, respectivement 5 et 3, et essayer de montrer que l'on n'atteint jamais sept pépites. Sous-jacente à son argumentation, se trouve l'idée (qu'il n'explicite pas, mais que l'on retrouve tout au long de sa démarche) d'une application entre les pépites et les noisettes qui conserverait la monotonie. Autrement dit, l'élève estime que pour que faire varier le nombre de pépites d'une unité, le nombre de noisettes doit varier, dans le même sens, d'une unité[108]. Ainsi, partant d'une tablette contenant 8 pépites et pour obtenir une tablette de 7 pépites, l'élève commence par diminuer d'une unité le nombre de noisettes en longueur de cette tablette : « Et après huit, on essaye un peu plus bas. Quatre fois trois (...) » (ligne 49). Face à l'échec de cette première tentative (« (...) ça ne marche pas. Parce que quatre fois trois il y aura six pépites (...) »), l'élève diminue désormais le nombre de noisettes en largeur : « et sinon on peut essayer...euh... cinq fois deux », ce qui le conduit également à un échec (« et donc ça ne va pas »). En effet, l'élève ne s'aperçoit pas que lorsqu'il diminue d'une unité le nombre de noisettes en longueur, il supprime toute une colonne de noisettes, ce qui implique une diminution de plus d'une pépite dans la tablette[109]. En conséquence, cette deuxième approche, de dimension plutôt géométrique, mène l'élève à la même conclusion, à savoir qu'il n'existe pas de tablette contenant sept pépites de chocolat. L'élève va par ailleurs jusqu'à généraliser l'affirmation, sans pour autant vérifier, aux tablettes contenant cinq et onze pépites (« cinq c'est pareil. Onze aussi... »). Ainsi, non seulement la réponse donnée par l'élève adopte un caractère général mais prend également en compte l'observation faite à propos de la tablette 3x2 : « Tous les premiers à part deux ».

Finalement, de la même façon que l'observateur a utilisé, dans le registre algébrique, la tablette 3x2 pour tenter de montrer à l'élève qu'il existe des tablettes contenant un nombre premier de pépites, il y fait à nouveau référence, dans le registre géométrique, désormais : « toi tu es en train de regarder ce genre de tablette. Et dans ce genre de tablette-ci ?» (ligne 50). Face à cette question, l'élève suggère la construction d'une tablette du même type que la tablette 3x2, cependant deux fois plus grande. Or la fausse conception auparavant appliquée à l'encadrement du nombre de pépites le

[108] Cette idée est un peu plus complexe que cela, nous la retrouverons sous une autre forme ailleurs dans son discours.
[109] Dans le cas où le nombre de noisettes en longueur est supérieur à 2.

conduit à nouveau à une fausse piste. En effet, pour l'élève, doubler une tablette revient à doubler le nombre de noisettes, en longueur et en largeur, qui la définissent (O : « Pourquoi six fois quatre ? » E : « Parce que c'est le double... Donc c'est le même type de tablette » lignes 52-53). Il se retrouve ainsi face à une tablette contenant 15 pépites, ce qui ne lui permet pas de progresser dans la résolution du problème. Cependant, c'est précisément dans le registre géométrique, en considérant une tablette du même type que la tablette 3x2, que l'élève s'aperçoit non seulement de la possibilité d'obtenir une tablette contenant sept pépites mais de la possibilité de construire une tablette de chocolat, quel que soit le nombre de pépites qu'elle contient (« (...) on peut obtenir tous les nombres (...) » ligne 55). Le registre géométrique non seulement s'avère le domaine dans lequel l'élève résout la question, mais se trouve également être celui dans lequel l'élève explicite son raisonnement : « si on agrandit en longueur à chaque fois, on peut obtenir tous les nombres... Si on fait une tablette longue et pas large ».

Notons finalement que la dimension géométrique (et concrète) du problème semble venir conforter l'élève dans sa réticence à considérer l'existence d'une tablette contenant sept pépites : « Oui. Mais bon, ça fait une tablette bizarre quand même » (ligne 58). Cette réponse est par ailleurs évocatrice d'un décalage qu'il semblerait y avoir, pour cet élève, entre une tablette de chocolat théorique, envisagée dans l'univers mathématique et une tablette réelle.

V.2.2 – Les élèves de 2^nde^

V.2.2.1 – Méthodologie

Les deux exercices proposés aux élèves de 4ème ont fait objet d'une deuxième expérimentation, menée auprès de 22 élèves de 2nde dans un collège de la banlieue parisienne. Le choix des questions proposées aux élèves a été fait en accord avec l'enseignante responsable de la classe lors d'un entretien préalable à la mise en place de l'expérimentation. En particulier, l'enseignante a choisi d'inclure un exercice supplémentaire parmi les tâches proposées dans la section V.1 (dorénavant noté exercice 2), de supprimer une question sur les trois questions posées aux élèves de 4ème (relatives aux démarches d'exploration d'une écriture symbolique) et d'adapter au niveau de 2nde l'énoncé du dernier exercice analysé ci-dessus.

Contrairement à l'expérimentation menée auprès de la classe de 4ème, celle-ci s'est faite en-dehors du cadre habituel des cours de mathématiques des élèves concernés. Ceux-ci étaient avertis qu'il s'agissait d'une recherche scientifique et que leur participation serait prise en compte dans l'évaluation à la fin du semestre[110]. Ainsi, les élèves ayant participé à cette expérimentation, qui s'est déroulée le samedi 18 mai 2002 en présence du chercheur, étaient tous volontaires et représentaient un total de 22 élèves sur 30 (effectif de la classe).

[110] L'enseignante a proposé aux élèves participant à l'expérimentation d'accorder des points supplémentaires ou de supprimer la plus mauvaise note lors du calcul de leur moyenne.

La mise en place de l'expérimentation s'est faite sous la forme d'un « contrôle facultatif » ; les élèves disposaient d'une heure pour répondre individuellement aux questions posées. Similairement aux élèves de 4ème, la calculatrice a été autorisée. L'original des devoirs ainsi que les brouillons recueillis à la fin de la séance ont servi de base pour l'analyse que nous développerons ci-après.

V.2.2.2 – Exercices expérimentés (2nde)

Voici une copie du devoir donné aux élèves de 2nde, tel qu'il leur a été présenté.

Exercice n°1

Pour les questions 1 à 3, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu.
a et *b* représentent deux nombres non nuls.

Question 1

A= $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$: ☐

B= $\frac{1}{a^2+b^2}$: ☐

C= $\frac{1}{(a+b)^2}$: ☐

n°1 : L'inverse du carré de la somme de *a* et *b*

n°2 : La somme des inverses des carrés de *a* et *b*

n°3 : Le carré de la somme des inverses de *a* et *b*

n°4 : Autre(s) : ☐

Question 2

A= $\frac{1}{ab}$: ☐

B= $\frac{1}{-a-b}$: ☐

C= $\frac{-1}{ab}$: ☐

n°1 : L'opposé de l'inverse du produit de *a* et *b*

n°2 : L'inverse du produit des opposés de *a* et *b*

n°3 : L'opposé du produit des inverses de *a* et *b*

n°4 :Autre(s) : ☐

Exercice n°2

Enoncé : (en partie extrait du *Nouveau Pythagore*, 2000, p.71) : On considère la fonction f telle que, pour tout réel x, $f(x)=x^2-x+2$.

a) Que vaut $f(1)$? Et $f(4)$?

b) Déterminer l'image de a par la fonction f, c'est-à-dire déterminer $f(a)$. Déterminer $f(-a)$.

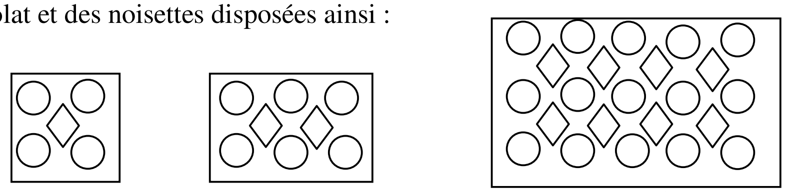
c) Exprimer $f(2x)$, $f(-x)$, $f(x+1)$ et $f(x^2)$.

d) Une fonction g est dite paire si, pour tout x réel, $g(-x)=g(x)$. D'après cette définition, la fonction f est-elle paire ?

e) Une question plus difficile : saurais-tu calculer $f(f(x))$?

Exercice n°3

Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2 tablette 3x2 tablette 5x3

et ainsi de suite.….

Légende : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.
La 1ère tablette est notée **2x2** *car il y a* ***2 noisettes*** *en longueur et* ***2 noisettes*** *en largeur.*
La 2nde tablette est notée **3x2** *car il y a* ***3 noisettes*** *en longueur et* **2** *en largeur ; et ainsi de suite…*

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?
Tablette 2x2 :………. Tablette 3x2 :………. Tablette 5x3 :……………

b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ? ……………..

c) Et dans une tablette 20x17 ?…………

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette? Expliquer (au dos)

e) Existe-t-il des tablettes contenant 12 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

V.2.2.3 – Analyse *a priori* des exercices (2^{nde})

Dans le présent paragraphe, nous procèderons uniquement à l'analyse *a priori* de l'exercice 2 , étant donné que les questions qui constituent les exercices 1 et 3 ont déjà fait objet d'analyse lors de la présentation de l'expérimentation menée dans la classe de $4^{ème}$. Cependant, l'énoncé de ceux-ci ayant subi quelques modifications, nous proposons de précéder telle analyse de quelques commentaires relatifs aux exercices 1 et 3.

Exercices 1 et 3

Observons tout d'abord que deux questions parmi celles proposées dans le premier exercice soumis aux élèves de $4^{ème}$ composent le premier exercice destiné aux élèves de 2^{nde}. Lors de l'entretien préalable à la mise en place de l'expérimentation, l'enseignante s'est montrée particulièrement concernée par l'éventuelle lassitude que pouvaient éprouver ses élèves face à un trop grand nombre de questions de ce type. Ainsi, elle a préféré diversifier le devoir, en rajoutant un exercice se rapprochant davantage de ceux proposés à ce niveau scolaire (exercice 2) et supprimer une question du premier exercice. Plus précisément, la question 3 a été choisie au détriment de la question 2[111] car cela permettrait, d'après l'enseignante, de repérer les élèves ayant des difficultés à cerner la différence entre « inverse » et « opposé » d'un nombre.

L'énoncé du troisième exercice présenté aux élèves de 2^{nde} s'est vu légèrement modifié par rapport à celui proposé à la classe de $4^{ème}$. En effet, à la dernière question, il s'agit de déterminer l'existence d'une tablette de chocolat contenant 12 pépites (plutôt que 7). A travers cette modification, et compte tenu du niveau scolaire plus élevé, nous nous attendons à un taux de réussite supérieur à celui des élèves de $4^{ème}$, qui avaient à faire au problème de divisibilité d'un nombre premier qui s'est révélé, *a posteriori*, comme un obstacle.

Exercice 2

Dans le paragraphe V.1.3.2, nous avons présenté les propos théoriques sous-jacents à la conception de cet exercice, en soulignant plus précisément l'importance de la substitution que l'analyse épistémologique a révélée dans l'étude du rapport au symbolisme. Il s'agit désormais, dans le présent paragraphe, de procéder à une analyse *a priori* des réponses susceptibles d'être apportées par

[111] Notation adoptée pour le devoir de la classe de $4^{ème}$.

les élèves de 2^{nde} tenant compte des éléments théoriques à partir desquels nous avons conçu cette tâche.

La première question est une question fréquemment rencontrée parmi les tâches proposées dans le contexte fonctionnel en classe de $2^{nde.}$. En effet, dès la classe de $3^{ème}$, les élèves sont confrontés au calcul de la valeur de fonctions affines en un point donné et le calcul de l'image d'un point par une fonction donnée devient plus généralement une pratique courante en seconde. Etant donné la nature de la fonction (polynomiale du second degré) et la nature des nombres en jeu (entiers naturels), nous nous attendons à un taux de réussite élevé parmi les réponses recueillies.

La seconde question est un peu moins routinière que la précédente même si l'application d'une valeur indéterminée à une fonction est rencontrée par les élèves, notamment à travers les exercices relevant de la parité d'une fonction (abordée dans l'avant-dernière question). Cette question devrait, entre autres choses, nous permettre de repérer de façon plus évidente les différentes étapes employées par les élèves dans la substitution et peut être permettre de comprendre d'éventuelles erreurs commises à la question précédente. En effet, étant donné que la réponse attendue à cette question n'est pas une simple valeur numérique, nous espérons ainsi retrouver le détail de la substitution effectuée dans la question précédente. Or afin de mieux cerner le rapport des élèves à cette manipulation algébrique particulière qu'est la substitution, nous proposons aux élèves deux instantiations littérales qui donneront lieu, à notre avis, à des taux de réussite différents. A la question précédente, l'élève a, en effet, eu affaire à des instantiations très particulières : il s'agissait de remplacer x par des valeurs positives. Ainsi, la réponse au premier item de cette seconde question, sorte de généralisation de la question a, ne demande guère de vigilance supplémentaire de la part de l'élève qui doit, quasi machinalement, substituer à tous lieux de x, la lettre a, adoptant ainsi une démarche qui est, dans la forme, en tout point pareille à celle employée précédemment. Le second item de cette question est, au contraire, davantage révélateur quant à la faculté de l'élève à procéder à des substitutions littérales et est par là même révélateur d'un volet spécifique de son rapport aux différents éléments de l'expression algébrique donnée. La substitution de x par un signe où figure la représentation de l'opposé, présente, pour la fonction f donnée, une complexité supplémentaire. Nous serons, en effet, particulièrement vigilants quant à l'écriture employée par l'élève pour exprimer, d'une part, le carré de –a et, d'autre part, l'opposé de –a (aura-t-il fait usage de parenthèses ?). Compte tenu de la complexité supplémentaire apportée au second item de cette question, nous nous attendons à un taux de réussite moins élevé à celui-ci qu'au premier.

Comme nous l'avons précisé lors de l'analyse épistémologique de cet exercice, la troisième question se situe dans le prolongement de la problématique de la question précédente. En effet, il s'agit ici à nouveau d'une instantiation, le signe de la substituante contenant cependant désormais elle-même le symbole à remplacer. Ainsi, aux lieux de la lettre x, on demande d'inscrire $2x$, $(x+1)$, etc. Nous apportons une attention particulière à la deuxième substitution requise (la détermination de f(-x)). La confrontation des réponses apportées à cette question et celles apportées à la question précédente pourra en effet apporter quelques réponses à la question initialement posée dans le cadre théorique : dans quelle mesure l'élève est-il troublé par la présence du signe de l'inconnue dans la forme à remplacer ? Autrement dit, l'élève ayant correctement déterminé $f(-a)$ en fera-t-il de même pour exprimer $f(-x)$? Plus généralement à présent, nous pensons que le taux de réussite relevé dans la question précédente sera, mise à part quelques éventuelles erreurs de développement de l'expression, du même ordre que celui relatif à cette question. Il nous semble, en effet, que l'élève ayant montré des indices d'une bonne maîtrise du symbolisme, en présentant notamment un bon rapport au concept de carré et d'opposé lors de la substitution de x par $-a$ dans l'expression de la fonction f présentera, dans l'ensemble, les réponses attendues à cette question.

La question d est une application de la question précédente et fait partie des questions usuellement abordées en classe de 2^{nde} dans les problèmes d'étude de fonctions. Il nous a semblé important de la faire figurer afin de présenter aux élèves une motivation (mathématique) à l'une des nombreuses substitutions qu'on leur a demandé d'effectuer. Entre autres choses, cette question nous permettra de repérer les élèves qui auront réinvesti les réponses apportées aux questions précédentes. Nous espérons ainsi que les élèves ayant répondu correctement à la question de détermination de la valeur de f($-x$) apportent la réponse attendue à cette question.

Finalement, la dernière question ne fait pas partie des habitudes d'un élève de 2^{nde} et permet de repérer les élèves pour qui la substitution, au sens large du terme, ne pose pas de problèmes. Il s'agit ici du cas extrême des instantiations rencontrées dans des questions précédentes. En effet, dans cette question, la substituante non seulement contient le symbole à remplacer (comme c'était le cas précédemment) mais s'avère ici en tout point pareille à l'expression initiale. L'élève qui aura montré être capable de substituer à x la fonction f, et par là même à percevoir le signe x comme un *tenant-lieu* à la place duquel peut s'inscrire toute forme, aura indubitablement montré posséder un élément d'une bonne maîtrise du symbolisme.

V.2.2.4 – Analyse des productions d'élèves (2^{nde})

Nous procéderons à l'analyse *a posteriori* des réponses données par les élèves de 2^{nde} en trois temps, correspondants aux différents exercices proposés. L'analyse des productions recueillies par les élèves de 2^{nde} se fera, dans un premier moment, indépendant des réponses apportées par la classe de $4^{ème}$. Une étude comparative relative aux deux niveaux scolaires sera l'objet du dernier paragraphe de la présente section.

Exercice 1

Question 1

Similairement à la démarche adoptée dans l'analyse des productions écrites de la classe de $4^{ème}$, nous avons ici choisi de regrouper les données relatives à cet exercice dans deux tableaux différents, qui nous permettent à la fois d'obtenir une vue d'ensemble sur la réussite aux différents items de chaque question mais aussi de mettre en évidence le cheminement parcouru par chaque élève pour ainsi dégager les différentes catégories de réponses apportées par la classe de 2nde.

	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$	$\frac{1}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{(a+b)^2}$	
Exp. math / **Réponses**	A	B	C	
1	1	**7**	**8+6**	*L’inverse du carré de la somme de a et b*
2	**12+ 6**	3	1	*La somme des inverses des carrés de a et b*
3	2	5	7	*Le carré de la somme des inverses de a et b*
4	1	0+**6**	0	*autre(s)*
sans rép.	0	1	0	
Total réponses	22	21	22	

Tableau 1

Légende :

- Les cellules en gras représentent les effectifs de réponse les plus importants
- Les cellules hachurées désignent les associations attendues
- Les effectifs en gras (+6) correspondent aux élèves dont toutes les réponses sont correctes

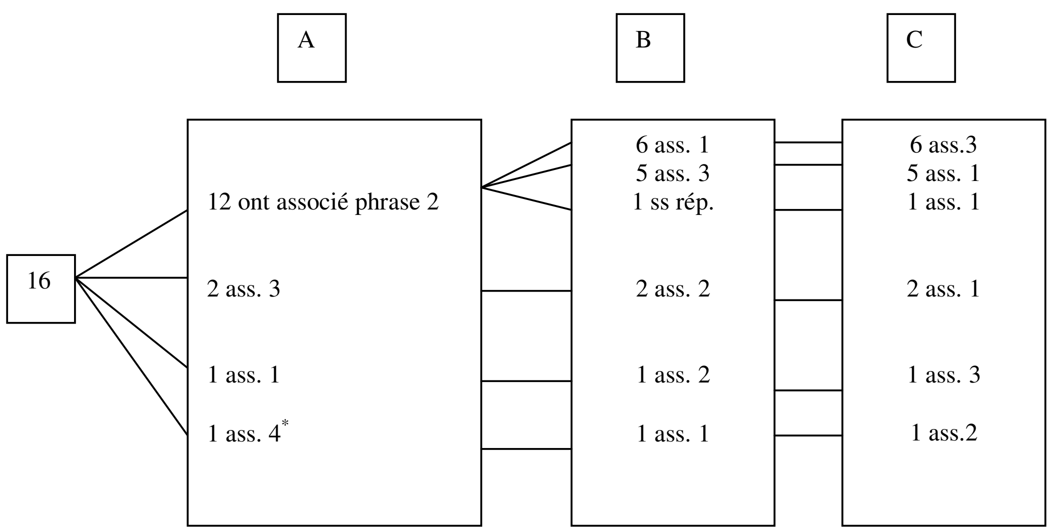


Tableau 2[112]

Légende :
*L’élève a répondu : « L’inverse des carrés de a et b ».

Nous résumons l’analyse des productions écrites de la classe de 2nde dans les paragraphes suivants.

Nous observons tout d’abord un grand investissement de la part des élèves dans la résolution de cette tâche, se traduisant par un taux négligeable de non réponse[113]. Parmi celles recueillies, nous

[112] Ce type de tableau prend uniquement en compte les réponses des élèves n’ayant pas associé correctement toutes les expressions.

notons cependant un taux de réussite assez bas : guère plus d'un quart des élèves (6 sur 22) ont associé correctement toutes les expressions algébriques aux phrases en français les décrivant. Nous verrons, dans ce qui suit, que non seulement le taux de réussite global n'est pas très élevé mais que les erreurs produites révèlent bien souvent ce que nous avons dénommé, *a priori*, des « incohérences », ne relevant pas de surcroît pas des catégories majoritairement attendues. Ainsi, dans l'analyse présentée ci-dessous, l'accent sera davantage mis sur les différentes erreurs repérées.

A la première expression, la majorité des élèves (18 sur 22) ont fourni l'association attendue, indiquant être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'expression A. Or, comme nous l'avions souligné dans l'analyse *a priori*, la réponse que l'élève apporte à cette question est insuffisante pour nous renseigner quant à sa faculté, de façon plus générale, à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau. En effet, seul l'examen des réponses apportées aux expressions suivantes permettra d'enrichir notre hypothèse, en la précisant éventuellement davantage. Ainsi, nous nous garderons d'émettre des conclusions prématurées et nous dirons simplement que la majorité des élèves ont, à ce stade de la question, montré être capable de reconnaître au moins l'assembleur de plus haut niveau de l'expression.

Les effectifs relatifs à l'expression B s'avèrent quasi équitablement répartis entre les phrases 1, 2, 3 et celles de type 4, cette dernière étant exclusivement choisie par les six élèves ayant réussi l'ensemble de la question. Les quinze autres élèves[114] se montrent mitigés dans leurs réponses et se regroupent principalement autour de deux choix : la phrase 1 et la phrase 3, le premier étant (de peu) majoritaire parmi les réponses apportées. En ce qui concerne le premier choix et compte tenu de l'analyse *a priori*, nous pouvons dire que, parmi les élèves n'ayant pas répondu correctement à l'ensemble de cette question, la plupart (7 sur 15) semblent toutefois reconnaître l'assembleur de plus haut niveau et privilégient les phrases déjà fournies par l'énoncé. Par ailleurs, presque la moitié des élèves n'ayant pas réussi l'ensemble de cette question ont associé à l'expression B la phrase 3, indiquant par là même adopter la démarche théorique du lecteur d'une expression, qui reconnaît en premier lieu les assembleurs les plus internes, ceux de plus bas niveau. Observons que ceci nous paraissait peu probable de se produire, compte tenu que les élèves ont montré, à travers leur réponse à l'expression précédente, reconnaître l'assembleur de plus haut niveau. La réponse relative à la dernière expression devrait nous permettre de mieux comprendre un tel choix, *a priori* jugé incohérent.

Finalement, nous observons que, en ce qui concerne l'expression C, les élèves se regroupent essentiellement autour de deux réponses, l'association de l'expression C à sa correspondante en français étant majoritaire.

En effet, 14 élèves sur 22 ont choisi la phrase 1 à cette expression, parmi lesquels ceux ayant produit toutes les associations attendues. Or nous devons nous montrer vigilants par rapport à cette

[113] Comme nous l'avions déjà précisé, ce type de tâche peut être retrouvé parmi les évaluations d'entrée en seconde et figure souvent dans les manuels de 3ème et 2nde. Ainsi, le premier exercice n'est pas tout à fait étranger aux pratiques d'élèves de 2nde.

réussite qui, nous le verrons, relève moins d'une bonne lecture des expressions que cela aurait pu paraître. En effet, à observer le détail du choix de chaque élève aux différentes expressions (tableau 2), nous notons que bon nombre ayant associé la phrase 1 à l'expression C ont répondu 2 et 3 aux expressions A et B, respectivement. Plus exactement, ces élèves constituent presque la moitié de l'effectif total de ceux ayant apporté la réponse attendue, l'autre moitié étant constituée des élèves ayant réussi l'ensemble des associations. Souvenons-nous que la catégorie de réponse 2-3 était jugée *a priori* incohérente. Ainsi, nous estimons que ceux ayant associé la réponse 1 à la dernière expression ont procédé par élimination, continuant de privilégier les phrases fournies par l'énoncé.

Le second choix des élèves s'est porté sur la phrase 3. Nous pouvons observer, à travers leurs réponses précédentes, que l'écrasante majorité des élèves ayant effectué une telle association sont ceux ayant associé les phrases 2 et 1 aux expressions A et B, respectivement, constituant ainsi la catégorie 2-1-3. Cette catégorie n'avait pas été retenue dans notre analyse *a priori*, étant donné que les réponses apportées par l'élève aux deux premières expressions indiquent une faculté à reconnaître l'assembleur de plus haut niveau et que, en choisissant la phrase 3 à l'expression C, l'élève choisit celle qui traduit la démarche théorique du lecteur d'une expression. Ainsi, nous pensons que les élèves ayant choisi la phrase 3 à la dernière expression ont procédé par élimination étant donné que la phrase attendue pour cette expression avait déjà été choisie[115].

En résumé, nous pouvons classer les réponses apportées par les élèves de 2nde en trois catégories principales, dont les effectifs sont sensiblement égaux. La première catégorie, notée 2-4-1, concerne les six élèves ayant produit la totalité des associations attendues. La seconde, 2-1-3, indique qu'approximativement un quart des élèves reconnaissent uniquement l'assembleur de plus haut niveau des deux premières expressions et se contentent des expressions déjà fournies par l'énoncé. Finalement, la catégorie 2-3-1, concernant un peu moins d'un quart des élèves, révèle un rapport encore plus fragile aux expressions algébriques proposées, la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau paraissant bien souvent aléatoire.

Question 2

Voici les tableaux regroupant les données concernant la deuxième question du premier exercice proposé aux élèves de 2nde.

[114] Nous notons une non-réponse à cette expression, la seule sur l'ensemble de la question.
[115] Cela montre, par ailleurs, que les élèves ne reviennent pas sur leurs choix antérieurs, si l'on suppose une letcure ordonnée des expressions proposées (cf. analyse a *priori*).

Exp. math / **Réponses**	A ($\frac{1}{ab}$)	B ($\frac{1}{-a-b}$)	C ($\frac{-1}{ab}$)	
1	3	**3**	**15**	*L'opposé de l'inverse du produit de a et b*
2	**3**	**14**	0	*L'inverse du produit des opposés de a et b*
3	6	3	6	*L'opposé du produit des inverses de a et b*
4	**9**	2	0	*autre(s)*
sans rép.	1	0	1	
Total réponses	21	22	21	

Tableau 3

<u>Légende</u> :

- Les cellules en gras représentent les effectifs de réponse les plus importants
- Les cellules hachurées désignent les associations attendues

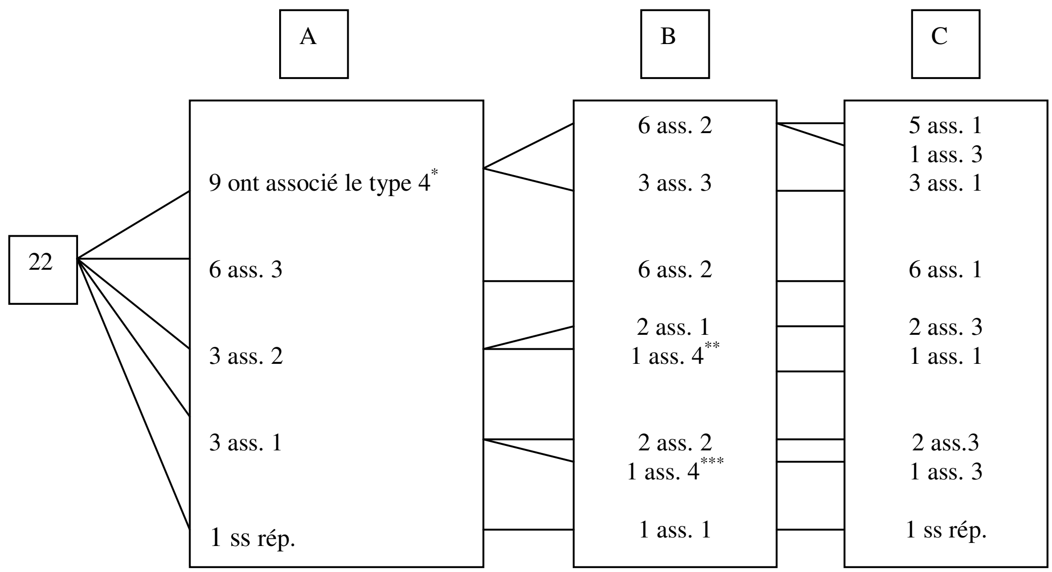


Tableau 4

<u>Légende</u> :

* 4 élèves ont écrit: « l'inverse du produit de a et b »
1 : « l'inverse du produit de a et de b »
1 : « inverse du produit de A et B »
1 : « inverse du produit de A et B »
1 : « l'inverse du produit de a et b »
1 : « l'inverse des produits de a et b »
** « inverse de la somme des opposés de a et b »
*** rien écrit

Observons tout d'abord que le taux de réussite relatif à cette question est nettement inférieur à celui de la question précédente (aucun élève n'a produit les associations attendues à l'ensemble des expressions proposées), ce qui vient confirmer nos hypothèses *a priori* quant à la complexité des expressions en jeu. Cependant, nous verrons que, bien que le taux de réussite soit inférieur à la question précédente, les réponses des élèves suggèrent un meilleur rapport aux expressions algébriques proposées. Mais avant de dresser un profil général des résultats de cette classe de 2^{nde} , examinons les réponses apportées aux différentes questions.

Essentiellement deux choix constituent la majorité des associations produites à la première expression. Comme nous l'avions prévu, la majorité des élèves (9 sur 22) ont écrit d'eux-mêmes la phrase traduisant cette expression[116], de niveau deux et peu complexe à produire. Un peu moins du quart de l'effectif total a associé la réponse 3 à cette expression, révélant, d'après notre analyse *a priori*, que ces élèves ont visiblement reconnu l'assembleur de plus haut niveau[117] mais ont confondu les termes « inverse » et « opposé ».

A l'expression B, plus de la moitié des élèves (14 sur 22) ont associé la phrase 2, montrant par là même une faculté à reconnaître l'assembleur principal de l'expression. L'examen du tableau 4 nous indique que cet effectif provient de deux groupes distincts d'élèves. Le premier, composé de 6 élèves, correspond aux élèves ayant associé correctement l'expression A à sa correspondante en français. Ainsi, et comme il était prévu dans l'analyse *a priori*, nous pouvons supposer que ces élèves ont pu être troublés par la complexité de la phrase à produire[118], ce qui les aurait conduit à choisir la phrase où l'assembleur principal (*i.e.* celui de plus haut niveau) figure en premier plan parmi celles proposées dans la colonne de droite. Le second groupe d'élèves est celui qui a associé la phrase 3 à l'expression A. La réponse que ces élèves apportent à l'expression B semble indiquer qu'ils sont en effet capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'expression, mais qu'ils présentent cependant un rapport encore fragile à celles-ci.

Finalement, l'expression C a été réussie par la totalité des élèves. Souvenons-nous par ailleurs, que pour cette expression, deux associations sont jugées correctes : la phrase 1 et la phrase 3. Observons toutefois que l'association de la phrase 3 à l'expression C semble moins révélatrice d'un choix réel. En effet, presque tous les élèves dans ces conditions avaient déjà choisi la phrase 1 (également attendue) à l'une des deux expressions précédentes ; il nous semble donc que ceux-ci auraient procédé par une démarche d'élimination. L'écrasante majorité des élèves (15 sur 22) qui ont choisi la phrase 1 pour traduire l'expression C avaient, quant à eux, le choix entre les deux associations attendues et ont, comme nous l'avions prévu, préféré la phrase 1, plus directe.

En conclusion, de l'analyse des productions des élèves se dégagent deux catégories principales de réponses, indiquant toutes deux la faculté de la majorité des élèves à reconnaître l'assembleur principal des expressions en jeu. La première catégorie (3-2-1), majoritaire, concerne près d'un quart des élèves et indique un assez faible rapport au symbolisme[119], ceux-ci ayant associé correctement une seule expression à sa description rhétorique. La seconde catégorie correspond à la catégorie majoritairement attendue d'après nos analyses *a priori* et est relative à la succession de réponses 4-2-1.

---

[116] Mise à part quelques variantes syntaxiques telle la phrase « l'inverse des produits de a et b ».
[117] Leur réponses aux expressions suivantes viendront d'ailleurs confirmer cette hypothèse.
[118] Ou encore ont pu s'imaginer qu'une seule phrase était laissée à leur charge.
[119] En ce qui concerne ce type de tâche, qui n'est qu'un élément d'étude du rapport des élèves au symbolisme, parmi bien d'autres.

Nous pouvons dire que les cinq élèves ayant ce profil possèdent une bonne faculté à traduire en langage naturel les expressions algébriques proposées, mais présentent cependant un rapport fragile aux parenthèses.

Exercice 2

Question a

Nous avons regroupé les données recueillies dans le tableau ci-dessous, que nous commenterons en quelques lignes.

Juste[120]	**Subst. juste/ erreur calc.**[121]	**ss. rép.**	**autre**
18	2	1	1

Tableau 1

Conformément à nos attentes, cette première question n'a pas fait obstacle à la plupart des élèves de 2nde qui, en grande majorité, ont produit le résultat attendu. D'après le détail des calculs fournis, nous pouvons observer que 20 élèves sur 22 ont montré une bonne faculté à remplacer les entiers naturels donnés dans l'expression de la fonction *f*[122], ce qui vient confirmer nos hypothèses relatives à la complexité de la tâche.

Question b

La grille d'analyse employée dans la question précédente, de par la nature même de cette dernière, s'est avérée insuffisante pour prendre en compte la totalité des réponses apportées à la question b. Nous les avons regroupées dans le tableau ci-dessous, composé désormais de trois nouvelles catégories, parmi lesquelles celle intitulée « erronée identifiable », que nous commentons dans ce qui suit.

	Juste	**Subst. juste/ non poursuivi**[123]	**Erronée identifiable**	**Autres**	**ss. rép.**
f(a)	13			1: *f*(a) est 2a	8
f(-a)	7	3	2 : $-a^2+a+2$	1 : *f*(-a) est $2(a^2)$	9

Tableau 2

[120] Cette catégorie, reprise par la suite, prend en compte les élèves ayant donné la réponse attendue sans pour autant avoir explicité le traitement formel appliqué. Dans ce cas, ce sont les élèves qui ont répondu: $f(1) = 2$ et $f(4)=14$, sans avoir nécessairement explicité : $f(1) = 1^2 – 1+2$ ou $f(4) = 4^2-4+2$.

[121] A ces effectifs correspondent les élèves ayant exprimé correctement la substitution de x par la forme requise dans l'expression de f, (ici 1 et 4) mais qui commettent des erreurs dans le développement du carré ou du premier degré. Cette catégorie sera également appliquée aux questions suivantes.

[122] Ceci concerne également les deux élèves à qui nous avons attribué la catégorie « substitution juste/erreur de calcul ».

[123] Cette catégorie, appliquée par la suite, concerne les élèves qui accomplissent avec succès la tâche purement formelle de la substitution, mais qui ne développent pas l'exposant ou le premier degré de la forme substituée.

Observons tout d'abord que le taux de non réponse diffère sensiblement de celui affiché dans la question précédente et n'est point négligeable : presque la moitié des élèves n'ont pas fourni de réponse à cette question. Il nous semble donc que, même si le problème posé par cette question (et en particulier dans le premier item) s'interprète, en termes mathématiques, comme une généralisation « naturelle » de la question précédente, ceci n'est nullement évident pour les élèves, qui semblent voir dans les deux interrogations deux questions bien distinctes.

De la même façon que l'on observe un important décalage entre la répartition des effectifs de la première question et ceux de la deuxième, on retrouve, à l'intérieur même de celle-ci, également de grandes différences.

L'écrasante majorité des élèves ayant répondu à la question qui consiste à déterminer $f(a)$, y ont répondu correctement et représentent près de la moitié de l'effectif total. L'item suivant, conformément à notre analyse *a priori*, a été nettement moins bien réussi : seul un tiers de la classe de seconde a donné la réponse attendue à cette question. Toutefois, à examiner le tableau 2 plus en détail, nous pouvons observer que près de la moitié des élèves (10 sur 22) ont exprimé correctement l'expression de $f(-a)$. En d'autres mots, nous pouvons dire que près de la moitié des élèves de la classe de 2^{nde} ont su inscrire, à chaque lieu occupé par la lettre x dans le texte symbolique, la substituante donnée (« a » et « $-a$ ») et ont, pour la plupart, développé correctement l'exposant et le premier degré.

Nous noterons par ailleurs l'apparition d'un type de réponse, persistant dans la suite de l'exercice, qui semble coïncider avec une erreur bien connue liée aux difficultés que revêtent les tâches de substitution. Nous l'avons dénommée « erronée identifiable », une appellation qui mérite quelques commentaires.

Les élèves regroupés dans cette catégorie ont produit des réponses où la première étape de leur substitution n'apparaît pas, et qui sont par là même insuffisantes pour être classées en tant que « substitution juste » (que ce soit dans la catégorie « substitution juste/ non poursuivi » ou dans « substitution juste/erreur de calcul »). De plus, la réponse fournie par les élèves qui ont ce profil semble correspondre à une erreur notifiée par ailleurs dans certains travaux didactiques (cf. Grugeon, 1995) et de ce fait, il nous a paru inapproprié d'attribuer à celles-ci un statut de « erreur de calcul ». Ainsi, c'est l'interprétation que nous donnons aux réponses d'élèves correspondant à cette catégorie qui est à l'origine de cet intitulé[124].

L'erreur à laquelle nous faisons allusion se caractérise par un traitement formel incorrect où le système de représentation fonctionne comme s'il n'y avait pas de parenthèses. Cette erreur, bien identifiée dans les travaux de Grugeon (1995), lui sert notamment de base pour analyser « des identifications incorrectes liées au rôle des parenthèses, du signe – ou de l'exposant 2 qui interviennent dans la formation des expressions -9^2 et $(-9)^2$ » [Grugeon, 1995, p. 154]. Ainsi, par exemple, aux

[124] Notons que la catégorie intitulée « autres » correspond aux réponses d'élèves incorrectes mais qui relèvent d'autres erreurs, toutes distinctes les unes des autres et parfois insuffisantes pour être bien identifiées.

élèves qui associent à -9^2 et $(-9)^2$ le même nombre (-81 ou 81), elle identifie une « interprétation incorrecte liée à une non distinction entre une écriture parenthésée ou non »[125]. La réponse donnée par deux élèves : «$-a^2+a+2$», bien que se situant dans un registre exclusivement symbolique, semble relever du même type d'erreur, relative à une mauvaise gestion des délimitants (en l'occurrence des parenthèses), suggérant que ces élèves sont essentiellement rattachés au sens des expressions, ce qui pourrait expliquer leur incapacité à procéder à des substitutions à l'aveugle. Il nous semble vraisemblable de penser que ces élèves remplacent partout x par « $-a$ », mais que pour eux, tandis que la substitution de x par « $- a$ » dans « $-x$ » donne « $-a$ », celle de x par « $-a$ » dans « x^2 » donne « $-a^2$ ». Nous verrons par la suite que, pour la plupart des substitutions requises dans cet exercice, la mauvaise gestion des délimitants est relative au développement du carré, plutôt qu'au premier degré.

$\boxed{\text{Question c}}$

En reprenant la grille d'analyse adoptée pour la question précédente, voici le tableau récapitulatif des réponses données par les élèves :

	Juste[126]	**Erronée identifiable**	**Subst. juste/non poursuivi/incomplet**	**Subst. juste/ erreur calc.**	**ss rép.**	**Autres**
$f(2x)$	7	1 : $2x^2-2x+2$	3	2	6	3
$f(-x)$	7	4 : $-x^2-(-x)+2$	1	1	8	1
$f(x+1)$	3	2 : $(x+1)^2-x+1+2$	4	3	8	2
$f(x^2)$	8		2	1	8	3

Tableau 3

Le taux de non réponse reste, pour cette question, assez élevé et est du même ordre que celui de la question précédente (8/22). Par ailleurs, nous retrouvons également essentiellement la même répartition des effectifs dans les différentes catégories de réponses, la réussite à l'ensemble de cette question étant représentée par environ un tiers des élèves (sauf en ce qui concerne la question de $f(x+1)$, que nous commenterons ultérieurement). Ces deux informations viennent confirmer nos hypothèses *a priori* en ce qui concerne le type de tâche en jeu dans cette question et sa complexité.

De façon générale, les erreurs décelées dans la résolution de cette question s'avèrent essentiellement de deux types différents. Lorsque la substitution a été explicitée dans la réponse de l'élève et s'est avérée correcte, elles correspondent à des erreurs de calcul. Le cas échéant, nous trouvons, dans la plupart des cas, une mauvaise gestion des délimitants (à laquelle nous nous référons

[125] Cette « interprétation » comporte différentes sous-catégories, nous renvoyons le lecteurs aux travaux de Grugeon pour plus de détails.
[126] Nous entendons par « juste » toute réponse d'élève ayant explicité la substitution (attendue) et ayant effectué correctement les calculs jusqu'à aboutir à l'expression sous sa forme développée.

sous l'appellation « erronée identifiable »). Notons que, dans les deux cas, c'est la substitution au lieu de x^2 qui semble davantage problématique, et ce en particulier pour la détermination de $f(-x)$, $f(x^2)$ et $f(2x)$. En effet, ce n'est que pour la substitution par « $x+1$ » que le développement du premier degré pose problème (car il faut distribuer le signe « - »), tandis que pour la substitution de « x^2 » et « $2x$ », et même de « $-x$ » à x dans « $-x$ », la distribution du signe est plus « naturelle ». Ainsi, il nous semble que les élèves ont moins de chance de se tromper sur le développement du premier degré lorsqu'ils ont affaire à la substitution de x par les trois expressions précitées et, en conséquence, il nous semble raisonnable que la plupart des erreurs dans ces cas proviennent du carré. Quoi qu'il en soit, les deux cas majoritaires d'erreurs repérées indiquent un mauvais rapport des élèves aux parenthèses. Il semblerait, en effet, que quelques élèves cernent difficilement le caractère nécessaire des délimitants, jugeant ceux-ci accessoires dans l'écriture d'une expression mathématique. Ainsi, nous nous retrouvons bien souvent face à des productions telles $f(x+1)^2 = (x+1)^2 - x+1+2$, ou encore $f(-x) = -x^2 - (-x)+2$. Nous notons un cas extrême de ce rapport aux parenthèses, illustré par la réponse d'un élève qui ne tient pas compte de la nature de l'objet à substituer, en se contentant de remplacer celui-ci à la place de la lettre x dans l'expression originale, et qui produit l'expression suivante : $f(x+1) = x+1^2-x+1+2$[127].

A examiner le « cheminement » de chaque élève, nous observons une certaine cohérence dans leurs réponses. En particulier, parmi les six élèves ayant exprimé correctement $f(-a)$, cinq ont donné la réponse attendue à l'expression $f(-x)$[128].

Finalement, nous notons que le plus faible taux de réussite à cette question est relatif à l'expression de $f(x+1)$. Cependant, bien que trois élèves seulement produisent le résultat attendu à cette question, la majorité de ceux y ayant répondu (10 sur 14) ont effectué correctement la substitution de x par $x+1$. Ceci semble indiquer que les calculs à effectuer sur la substituante ont paru plus complexes pour les élèves, ce qui peut notamment expliquer le grand nombre de réponses incomplètes.

Question d

Nous avons regroupé les réponses des élèves dans le tableau suivant. Les réponses attendues, dénommées « juste », ont été classées en deux catégories : « Litt. » (littérale) et « Ex. » (exemple). En procédant à une telle distinction, nous avons voulu mettre en évidence le type de justification apporté par les élèves. Ceux adoptant le profil « ex. » sont ceux qui énoncent que la fonction n'est pas paire à partir d'un exemple pour lequel $f(x) \neq f(-x)$ tandis que la catégorie « Litt. » fait allusion aux élèves qui ont comparé les expressions littérales de $f(x)$ et $f(-x)$ pour aboutir à la conclusion que f n'est pas paire.

[127] Ce cas, que nous avons classé dans la catégorie « autres », est une situation limite de la mauvaise gestion des parenthèses ; des cas intermédiaires peuvent bien évidemment se présenter.
[128] Et un élève effectue une substitution partielle.

Juste		jf-c$_j$	jf-c$_f$	j ss just.	pas compris	ss rép.
Litt.	Ex.	1	1	3	2	10
1	4					

Tableau 4

Légende :

jf-c$_j$: expression correcte de $f(x)$
expression incorrecte de $f(-x)$
comparaison aboutissant à : $f(x)$ n'est pas paire

jf-c$_f$: expression correcte de $f(x)$ juste
expression incorrecte de $f(-x)$
comparaison aboutissant à : $f(x)$ est paire

j ss just. : énonce que $f(x)$ n'est pas paire ; sans justification

Cette question présente le taux le plus élevé de non réponse de tout l'exercice. En effet, si nous prenons en compte les élèves ayant explicité ne pas avoir compris la question, nous pouvons affirmer que celle-ci a été à l'origine, pour plus de la moitié des élèves de la classe de 2nde, d'un grand désarroi. Notons que la nature de cette question diffère des précédentes et fait intervenir, bien qu'implicitement, la notion de preuve, ce qui peut être à l'origine du taux élevé de non réponses.

Parmi les élèves ayant répondu à cette question, la plupart se sont servi d'une valeur particulière de x[129]pour justifier la non parité de la fonction, sans faire allusion aux expressions littérales de $f(x)$ et $f(-x)$. A examiner les réponses de ces élèves aux questions précédentes, nous notons que ceux-ci n'ont pas produit la réponse attendue pour $f(-x)$, mais ont, pour la plupart (3 sur 4), correctement calculé $f(-x)$ pour la valeur choisie, ce qui semble indiquer un certain malaise à manipuler les expressions littérales, confirmé par leurs réponses bien souvent incorrectes (justifications partielles ou incorrectes) aux différents items de la question précédente.

Il nous semble également important d'examiner les cas où les élèves font appel aux expressions littérales pour répondre à la question d et plus exactement ceux classés « jf-c$_f$ et jf-c$_j$ » dans le tableau. Dans les deux cas, soulignons que l'élève se trompe dans l'écriture de $f(-x)$ à cette question mais l'examen de ses réponses aux items précédents montre qu'il a toutefois exprimé correctement $f(-a)$ et $f(-x)$. Cependant, la plupart des substitutions demandées dans la question c ont été correctement réalisées ; nous pensons que l'échec à cette question n'est pas significatif.

Finalement, examinons les trois cas restants, relatifs aux élèves n'ayant pas justifié leur réponse. Parmi ceux-ci, deux élèves ont produit l'expression attendue de $f(-x)$. Nous pouvons supposer que ceux-là se sont servi de leur réponses précédentes pour affirmer que f n'est pas paire mais aucune hypothèse ne peut être faite quant à l'autre élève, qui a produit une substitution partielle pour $f(-x)$ et qui n'a pas répondu à la question concernant la détermination de $f(-a)$.

[129] Les élèves ont le plus souvent choisi la valeur 2 pour x.

Question e

En reprenant la grille d'analyse ayant servi aux questions précédentes (et plus précisément à la question c), nous pouvons résumer les données recueillies dans le tableau suivant.

Subst. juste/non poursuivi/incomplet	**Subst. juste/ erreur calc.**	**Pas compris**	**Non**	**Autre**	**ss rép.**
3	3	1	6	1	8

Tableau 5

Le taux de non réponse est, encore une fois, très élevé : en prenant en compte l'élève qui explicite ne pas avoir compris la question, ce taux s'élève à près de la moitié de l'effectif. Si nous considérons, par ailleurs, les élèves ayant affirmé ne pas être capable de calculer $f(f(x))$ (ayant tout simplement répondu « non » à la question), nous pouvons supposer que nos hypothèses *a priori* quant à la complexité de la tâche, de surcroît inhabituelle pour la plupart des élèves de 2^{nde}, viennent se confirmer.

Nous retrouvons néanmoins une part importante d'élèves (6 sur les 7 productions restantes) ayant effectué la substitution attendue, c'est-à-dire ayant écrit : « $f(f(x))= (x^2-x+2)^2-(x^2-x+2)+2$ ». En examinant les réponses données aux autres questions, nous pouvons observer que ces élèves se montrent capables d'inscrire, partout, à chaque lieu occupé par la lettre x dans le texte symbolique, les formes données, se distinguant ainsi de la plupart de leurs collègues qui indiquent un rapport encore fragile au symbolisme.

Exercice 2

Question a

Conformément à notre analyse *a priori*, le taux de réussite à cette question est très élevé : tous les élèves ont produit la réponse attendue à cette question.

Questions b et c

L'analyse *a priori* de ces questions suggérait une diversité possible dans les méthodes employées par les élèves pour y répondre. Les productions recueillies ont montré, en effet, que certains élèves ont eu recours à des dessins tandis que d'autres justifiaient leurs réponses à l'aide de calculs. Nous résumons les données recueillies dans les tableaux ci-dessous, également utilisés pour décrire les réponses données par les élèves de $4^{ème}$:

Question b :

Juste (19)				Faux (3)	
J ss d/ss c	J avec d	J avec c	J avec d/ avec c	F ss d/ ss c	F avec d
10	4	3	2	2	1

Question c :

Juste (19)			Faux (3)	
J ss d/ss c	J avec d	J avec c	F avec c	F ss d/ ss c
14	1	4	1	2

<u>Légende</u> :

ss d/ ss c : sans dessin ni calcul
avec d : avec dessin uniquement
avec c : avec calcul uniquement
avec d et c : avec dessin et calcul.
Observons que par « calcul », nous entendons également l'explicitation de multiplications (une réponse telle 11x9 pour la question (b) serait ainsi classée en tant que J avec c)

Observons tout d'abord que l'ensemble de la classe de 2^nde^ a traité les deux questions, en produisant, pour la plupart des élèves (19 sur 22), les réponses attendues.

Nous notons par ailleurs un taux élevé de réponses sans justifications (à peu près la moitié des effectifs), c'est-à-dire ne présentant ni dessin ni calcul à l'appui. En examinant les réponses de chaque élève, nous observons que les dix élèves n'ayant pas accompagné leur réponse de calcul ni de dessin à la question b ont procédé de la même façon pour la question suivante. Auraient-ils compris, dès la première question, le modèle de construction d'une tablette quelconque ? L'analyse isolée des réponses données à ces questions est insuffisante pour y répondre, seul l'examen des réponses relatives aux questions suivantes et plus exactement à la question d (où il s'agit de décrire, d'une façon ou d'une autre, la formule explicitant le lien entre le nombre de noisettes et de pépites que contient une tablette), pourra nous renseigner quant à la légitimité de leur réponses.

Nous pouvons toutefois émettre quelques hypothèses quant aux quatre autres élèves n'ayant pas fourni de justification à la question c. A examiner le détail de chacune de leur réponses, nous notons que ceux-ci ont donné la réponse attendue à la question précédente, accompagnée d'un dessin ou de l'explicitation de la multiplication 10x8. Nous pouvons supposer que ces élèves auraient compris le modèle « général » de figure à travers l'examen de la question b, n'éprouvant plus le besoin de justifier leur calcul.

Toujours à propos des méthodes employées pour résoudre ces deux questions, nous observons que conformément aux hypothèses *a priori*, le nombre d'élèves ayant ébauché un dessin à la question c est inférieur à celui relatif à la question précédente : tandis que, pour trouver le nombre de pépites d'une tablette 11x9, sept élèves ont eu recours à un dessin, seulement un élève a dessiné une tablette de chocolat pour répondre à la question suivante. Nous pouvons imaginer que l'examen de la question b aurait suffi aux élèves pour saisir le modèle général de la tablette ou encore que les dimensions de la tablette en jeu dans la question c les aurait découragé de la représenter.

Finalement, trois élèves ont répondu incorrectement aux questions b et c et ont donné, pour la plupart, le résultat de la multiplication 11x9 pour la question b et 20x17 pour la question c. Ces réponses restent toutefois marginales, la classe de 2^{nde} a, dans l'ensemble, apporté les réponses attendues à ces questions.

Question d

Nous avons souligné, dans notre analyse *a priori*, que pour répondre correctement à cette question, l'élève doit à la fois être capable de déterminer la relation entre le nombre de pépites et de noisettes que contient une tablette de chocolat, mais doit aussi pouvoir exprimer ladite relation ; deux compétences qui s'avèrent de natures distinctes et indépendantes. Cette différence semble se confirmer par l'analyse des productions écrites : tandis que 19 élèves ont produit les réponses attendues aux deux questions précédentes en suggérant, par là même, avoir saisi le modèle de construction d'une tablette de chocolat, seuls 11[130] élèves ont explicité, dans cette question, la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites contenues dans une tablette de chocolat à partir du nombre de noisettes donné.

Souvenons-nous ensuite que deux informations sont en jeu dans cette formule : le rapport, pour chaque rangée de noisettes, entre noisettes et pépites (pour x noisettes, il y a x-1 pépites) et le processus permettant d'obtenir, au final, le nombre total de pépites (la multiplication). L'analyse des productions recueillies a montré que les deux informations portées par la formule étaient bien souvent exprimées de façons différentes chez un même élève et, plus particulièrement, que tandis que le rapport entre noisettes et pépites était souvent exprimé entièrement en français, la multiplication était, quand il y avait lieu, évoquée à travers un exemple précis.

Les données quantitatives illustrant cette analyse ont été regroupées dans le tableau ci-contre, que nous commentons par la suite :

---

[130] Nous reviendrons par la suite sur l'analyse détaillée des réponses fournies par les élèves, reproduites en annexe dans leur intégralité. Notons cependant déjà que cet effectif correspond aux dix élèves rassemblés dans la catégorie « deux informations » auxquels s'ajoute l'élève dont la réponse a été notée 2. Les réponse notées 1, 18, 5 nous renseignent uniquement sur la capacité de l'élève à percevoir le rapport entre noisettes et pépites en longueur et/ou en largeur.

<table>
<tr><th colspan="2">Raisonnement sur tablette quelconque
(12)</th><th></th><th>Raisonnement sur un exemple (2)</th><th>autre
(5)</th><th>ss rép.
(3)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Deux informations[131]</td><td>Une information[132]</td><td rowspan="3">fcais/chiffre/s.o. :2[133]</td><td rowspan="3">5 [134]</td><td rowspan="3">3 [135]</td></tr>
<tr><td>Exprimées dans même registre</td><td>rapport : français; multiplication : ex numérique</td><td rowspan="2">- Français :1[136]
- Français/ symboles lettrés : 1[137]</td></tr>
<tr><td>-Français: 3[138]
-fcais/chiffres : 1 [139]
fcais/chiffres/s.o. 1 [140]
formule lit.: 1 [141]</td><td>4[142]</td></tr>
</table>

Plusieurs informations se dégagent de ce tableau.

Tout d'abord, en ce qui concerne l'objet principal du questionnement relatif à cette question, nous notons que deux élèves seulement se servent de lettres pour décrire la formule. Parmi ceux-ci, un élève fourni la réponse attendue, en distinguant le nombre de noisettes en longueur du nombre de noisettes en largeur au moyen de lettres différentes (« *si par exemple on a une tablette x×y pour savoir le nombre de pépites on utilise la formule (x-1)*x*(y-1)* »). L'autre élève, au contraire, ne fait pas cette distinction et emploie une seule lettre (*x*), aussi bien pour désigner le nombre de noisettes en longueur que pour celles en largeur. Cette « fusion », sous un même signe, de deux quantités inconnues distinctes relève, à notre avis, d'un amalgame entre part d'inconnu et substance inconnue, révélée par l'analyse épistémologique (cf. section IV.2.5). La réponse de l'élève semble indiquer, en effet, que l'élève distingue les deux quantités inconnues (« *(...) il y a x-1 nombre de pépites, autant en longueur qu'en largeur (...)* »), seulement ne les représente pas au moyen de signes distincts[143].

Nous notons par ailleurs que quelques élèves ont décrit la formule attendue entièrement en français, comme en témoigne la réponse notée 10 : « *Si on connaît le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, ma solution serait d'enlever une noisette en longueur et une en*

[131] Cette catégorie correspond aux élèves qui décrivent la formule dans son intégralité, c'est-à-dire qui prennent en compte les deux informations évoquées plus haut : le rapport entre noisettes et pépites et la multiplication.
[132] Dans cette catégorie, nous retrouvons les élèves faisant uniquement allusion au rapport existant entre les noisettes et les pépites et n'évoquant pas la multiplication dans sa description.
[133] Correspond aux réponses notées 1 et 2 en annexe
[134] Correspond aux réponses notées 3,8,13,17 et 21. Elles ne nous permettent pas de savoir si les élèves ont saisi, ou non, le modèle général de construction de chaque tablette.
[135] Correspond aux réponses notées 7, 15 et 16.
[136] Correspond à la réponse notée 18.
[137] Correspond à la réponse notée 5.
[138] Correspondent aux réponses notées 10, 11 et 12.
[139] Correspond à la réponse notée 14.
[140] Le terme « s.o. » est l'abréviation de « symboles opératoires ». Cet effectif correspond à la réponse notée 9.
[141] Correspond à la réponse notée 22.
[142] Correspondent aux réponses notées 4, 20, 6 et 19.
[143] Ceci n'est pas, comme en témoigne la réponse de l'élève, un handicap pour décrire la formule, mais cette dernière est « raccourcie » (l'élève n'explicite pas la multiplication).

largeur et de multiplier car on peut remarquer que les noisettes et les pépites sont tout le temps disposées de la même façon, qu'il y en ait peu ou beaucoup ».

La prise en compte des deux informations (le rapport entre noisettes et pépites ainsi que la multiplication) est cependant rarement exprimée entièrement en français, comme nous l'évoquions au début du paragraphe. En effet, nous observons que si trois élèves (notés 10, 11 et 12) ont choisi ce mode d'expression, la part rhétorique des descriptions est le plus souvent réservée à l'expression du rapport entre noisettes et pépites. Nous retrouvons ce double mode d'expression dans quatre copies d'élèves, illustrées par la description suivante :

« Car on enlève un à chaque.

11x9 = 10x8 = 80
20x17 = 19x16 = 304 etc »[144]

Finalement, une troisième catégorie de réponses semble émerger des réponses données par les élèves. Indépendamment du fait que les élèves aient, ou non, explicité la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites contenues dans une tablette de chocolat à partir du nombre de noisettes donné, bon nombre d'élèves font appel à une écriture intermédiaire entre le rhétorique et le littéral, et teintent leurs descriptions de symboles opératoires, chiffres et quelquefois lettres. Cette catégorie peut être illustrée par la production suivante : « *On peut savoir le nombre de pépites car par exemple dans une tablette 6x4 = il y a 6 longueur donc 5 pépite* » (notée 1), mais est surtout illustrée par la réponse dite 9 : « S*i on connait le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, en faisant le nombre de noisettes en largeur-1 (car pour chaque rangés de noisettes on enleve une pépite ex : 3 noisettes → 2 pépites)* x *nombre de noisettes en longueur-1 = nombre de pépite dans une tablette.*
ex : une tablette noté 6x4 = (6-1) x (4-1) = 5x3 = 15. Il y a donc 15 pépites dans cette tablette ».

Question e

Souvenons-nous que la réponse à cette question n'est pas unique : plusieurs tablettes de chocolat peuvent contenir 12 pépites : ce sont les tablettes notées 5x4, 7x3 et 13x2.

Tous les élèves, sauf un, ont répondu à cette question, la plupart n'ont cependant pas cherché l'exhaustivité.

Nous pouvons regrouper les réponses données par les élèves dans le tableau suivant :

5x4, 7x3,13x2 (5)		**5x4, 7x3** (2)		**5x4** (6)		**7x3** (3)		**13x2** (1)		**faux** (3)	**ss rép** (1)	**autre** (1)
just	ss just	just	ss just	just	ss just	just	ss just	just	ss just	3	1	1*
2	3	0	2	1	5	1	2	1(12 est pair)	0			

144 Notons que le premier signe « = » présente un statut particulier, déjà repéré parmi les réponses d'élèves de la classe de 4ème : celui relatif à l'idée d'association et non d'égalité ; il évoque également l'idée de « raccourci » identifiée dans le discours de l'élève de 4ème .

<u>Légende</u> :

just : Les élèves dans cette catégorie ont fourni une justification
ss just : Les élèves dans cette catégorie n'ont pas fourni de justification
* L'élève a écrit : « 2 pépites : 3x2 »

Nous retrouvons, essentiellement, deux catégories de réponses d'élèves, dont les effectifs sont sensiblement égaux.

La première catégorie concerne à peine plus du quart de l'ensemble de la classe et correspond aux élèves qui ont considéré une seule tablette contenant 12 pépites : la tablette notée 5x4. La deuxième catégorie, représentée par cinq élèves, correspond à la réponse attendue.

Observons que dans les deux cas, la plupart des élèves n'ont pas justifié leur réponses, ce qui est d'ailleurs majoritaire dans l'ensemble des réponses données à cette question.

A examiner le détail des deux catégories, nous observons que les élèves ayant distingué les trois tablettes différentes sont ceux ayant fourni une description détaillée de la formule donnant le nombre de pépites à partir du nombre de noisettes à la question précédente[145]. En particulier, nous retrouvons parmi ceux-là la réponse donnée sous forme littérale, et également celle sous forme rhétorique « intermédiaire ». Les élèves, majoritaires, dont les réponses correspondent à la première catégorie, ont, quant à eux, fourni à la question précédente une description souvent moins détaillée de la formule[146]. Quelques uns en effet ont explicité dans la formule uniquement le rapport entre noisettes et pépites, tandis que d'autres ont été classés, à la question d, en tant que « autre » ou « sans réponse ». Nous pouvons émettre l'hypothèse que ceux ayant répondu la tablette 5x4 à cette question, semblent avoir, pour la plupart, moins bien saisi le rapport entre noisettes et pépites et se sont servi de l'examen de la tablette 5x3 fournie dans l'énoncé pour répondre à cette question.

V.2.3 – <u>Vers une analyse comparative des différents rapports au symbolisme</u>

Après avoir individuellement analysé les réponses fournies par les élèves de chaque classe aux différents exercices suggérés, nous proposons désormais de mettre en regard les conclusions que nous avons dégagées, en procédant ainsi à une sorte de synthèse comparative des différents rapports au symbolisme relativement aux types de tâches proposés. Cette étude se fera en deux temps et sera relative aux exercices communs aux deux classes. Les réponses aux exercices n'ayant pas été traités à la fois par la classe de 4ème et par celle de 2nde ne serviront pas de base à l'analyse comparative, elles viendront cependant étayer nos conclusions quant au rapport des élèves, de chaque niveau, au symbolisme.

[145] Ce sont les élèves dont les réponses à la question précédente ont été notées 6, 10, 11, 18 et 22.
[146] Ce sont les élèves ayant fourni les réponses notées 1, 4, 12,13, 14 et 16.

Nous compléterons l'analyse comparative dans la sous-section suivante, où nous procèderons à un examen plus global de l'expérimentation menée et où nous étudierons notamment les limites et les prolongements éventuels de celle-ci.

V.2.3.1 – Les deux démarches d'exploration d'une écriture symbolique

Rappelons tout d'abord la problématique sous-jacente à cet exercice (intitulé *exercice 1* dans l'analyse qui précède) qui consiste à associer à différentes expressions algébriques leurs correspondantes en français.

Cet exercice répond, comme nous l'avons précisé au début du présent chapitre, à un double objectif. Si, d'une part, il traduit l'idée épistémologique, analysée dans le chapitre précédent et relative à la double ordination théorique de l'exploration d'une écriture symbolique, il a été conçu, d'autre part –et il en va de même pour l'ensemble des exercices exposés dans ce chapitre- afin de mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme. Plus précisément, il devrait nous permettre de répondre à la question suivante : dans quelle mesure un élève, placé en position de lecteur (puisqu'il est face à des écritures symboliques déjà fournies), parvient-il à se dégager de l'ordre de l'interprétation qu'il en fait pour reconnaître la « structure » de l'expression qui lui est donnée et donc se placer en tant qu'auteur de l'expression?

L'analyse *a priori* des réponses des élèves a permis un raffinement de ce questionnement en suggérant, nous l'avons vu, différents « degrés de reconnaissance » de la structure des expressions proposées. Ceux-ci, intimement liés à la reconnaissance de l'assembleur de plus haut niveau des expressions, ont été à l'origine de différentes catégories de réponses. Ainsi, pour procéder à l'analyse comparative des réponses données par les élèves de 4ème et de 2nde, nous nous servirons de cette catégorisation qui nous permettra, par la suite, de dégager les principales conclusions.

Nous avons regroupé dans le tableau suivant les effectifs relatifs aux principales catégories issues de l'analyse des productions des élèves :

Classe de 4ème (27 élèves)	**Classe de 2nde (22 élèves)**
Question 1 **2-4-1** : 16 élèves **2-1-3** : 2 élèves **1-2-3** : 2 élèves	Question 1 **2-4-1** : 6 élèves **2-1-3** : 6 élèves **2-3-1** : 5 élèves
Question 3[147] **4-2-1** : 16 élèves **3-2-1** : 3 élèves **4-3-1** : 2 élèves	Question 2 **4-2-1** : 5 élèves **3-2-1** : 6 élèves **4-3-1** : 3 élèves

[147] Cette question, dernière dans le devoir de la classe de 4ème correspond à la question 2 du devoir donné aux élèves de 2nde. Nous avons conservé la notation des questions telles qu'elles apparaissent dans l'analyse menée dans les paragraphes précédents.

Plusieurs informations se dégagent à l'issue de l'analyse de ce tableau.

La première, plus immédiate et plus frappante, est relative à la disparité des taux de réussite entre la classe de 4ème et celle de 2nde. Plus précisément, d'après les données obtenues, nous n'observons pas une progression des compétences en ce qui concerne l'association entre langue symbolique et naturelle entre les deux niveaux scolaires, les élèves de 4ème présentant de surcroît de meilleurs résultats que ceux de seconde. A ce fait, pour le moins inattendu, nous attribuons essentiellement deux raisons, également valables pour l'analyse de l'exercice des tablettes de chocolat. Souvenons-nous, d'une part, que tandis que cet exercice a été présenté aux élèves de 4ème comme faisant partie d'un devoir surveillé habituel, l'expérimentation de la classe de 2nde a concerné uniquement des « volontaires », à qui l'enseignante avait prévu d'attribuer un « bonus » dans le calcul leur moyenne. Nous nous retrouvons ainsi peut-être face à des élèves de 2nde éprouvant le besoin d'améliorer leur note, et dont le niveau peut, par conséquent, ne pas être représentatif du niveau d'une classe ordinaire de 2nde[148]. D'autre part, notons que nous avons ici affaire à un effectif très réduit d'élèves dans les deux classes, et en particulier dans la classe de seconde, composée de 22 élèves seulement; il serait donc hasardeux d'en tirer des conclusions générales.

Passons à présent à l'analyse, globale, dans un premier temps, puis individuelle, de chaque question.

Nous pouvons observer que la répartition des réponses de la classe de 4ème est nettement plus concentrée que celles de la classe de 2nde : tandis que les réponses des élèves de 2nde se distribuent quasi-uniformément autour de trois catégories, les élèves de 4ème se regroupent essentiellement autour d'un seul profil, aussi bien pour la question 1 que pour la question 2[149]. De façon générale, nous dirons donc que la classe de 4ème semble présenter un niveau plus homogène que celle de 2nde dans la résolution de cet exercice.

En ce qui concerne la question 1, nous pouvons tout d'abord observer que nous ne retrouvons pas exactement les mêmes catégories dans les deux classes. En particulier, la catégorie 2-3-1, représentée par bon nombre d'élèves de 2nde, ne figure pas parmi les principaux profils des élèves de 4ème. Souvenons-nous de l'interprétation donnée à cette catégorie. D'après nos analyses *a priori*, la suite des réponses 2-3-1 attribuées aux expressions A, B et C, respectivement, indique que, tantôt l'élève entreprend la démarche d'auteur et reconnaît l'assembleur structurant l'expression et tantôt il adopte la démarche de lecteur de l'expression en reconnaissant les assembleurs les plus internes de celle-ci. Si nous nous en tenons à cette interprétation de la catégorie 2-3-1 (qui n'a d'ailleurs pas été

[148] Nous avons vérifié *a posteriori* le bien fondé cette hypothèse auprès des enseignantes des deux classes. En effet, celle responsable de la classe de 4ème la caractérisait comme étant, en reprenant ses termes, "une bonne classe" tandis que le niveau de la classe de 2nde était, d'après l'enseignante en charge, "faible".

[149] Notons, à ce propos, que nous incluons dans ce tableau certaines catégories non représentatives des réponses données par les élèves de 4ème (celles constituées de 2 ou 3 élèves). Celles-ci correspondent cependant aux catégories dont les effectifs sont immédiatement plus importants que ceux de la première catégorie. C'est dans un souci de comparer leurs effectifs à ceux relatifs à la classe de 2nde que nous avons choisi de faire figurer ces catégories dans le tableau.

retenue dans l'analyse *a priori* car jugée « incohérente »), nous pouvons dire que l'absence d'un tel profil parmi les réponses d'élèves de 4ème peut être un indice d'un bon niveau de maîtrise du symbolisme, une hypothèse qui semble se confirmer par l'effectif élevé de réponses autour de la catégorie, attendue, 2-4-1. Ensuite, notons que bon nombre d'élèves de la classe de 2nde présentent le profil 2-1-3, correspondant à la seconde catégorie de réponse des élèves de 4ème, dont l'effectif est cependant nettement moins élevé. D'après l'analyse *a priori*, les élèves qui présentent ce profil sont ceux qui reconnaissent l'assembleur de plus haut niveau des deux premières expressions mais qui se contentent des propositions de phrases présentées dans l'énoncé et choisissent, à défaut de choix supplémentaires, la phrase 3 pour l'expression C. Là encore, la différence d'effectifs d'élèves de 4ème et 2nde présentant ce profil semble révélateur du degré de reconnaissance de la structure des expressions proposées, plus élevé pour ceux-là que pour ceux-ci.

La question 2, en revanche, présente les mêmes catégories pour les deux niveaux scolaires et, en particulier, le taux de réussite ne diffère pas de façon significative d'un niveau à un autre[150], contrairement à celui relatif à la question précédente. Le profil majoritairement rencontré parmi les élèves de 4ème (et presque majoritaire parmi ceux de 2nde) est celui noté 4-2-1, confirmant nos hypothèses *a priori*. Compte tenu de la complexité des expressions en jeu dans cette question, analysée par ailleurs, cette catégorie indique une bonne faculté à traduire en langage naturel les expressions données[151], cependant souligne un rapport fragile aux parenthèses. La catégorie majoritairement rencontrée dans les copies des élèves de 2nde indique, au contraire, une moins bonne faculté à résoudre le type de tâche instancié par l'exercice : c'est la catégorie 3-2-1, représentée par trois élèves seulement de 4ème. Finalement, le dernier profil semble indiquer qu'une minorité d'élèves, de 4ème et de 2nde, ne reconnaissent pas les assembleurs de plus haut niveau de toutes les expressions, ce cas reste cependant marginal.

En conclusion, nous pouvons dire que les élèves de 4ème, bien que se situant à un stade encore d'introduction du symbolisme, semblent présenter une meilleure maîtrise de celui-ci, au moins en ce qui concerne le type de tâche illustré par cet exercice.

V.2.3.2 – L'usage des lettres dans la résolution d'un problème

Dans un premier temps, rappelons la problématique sous-jacente à l'exercice des tablettes de chocolat, proposées aux deux classes.

Cet exercice a été conçu afin de placer l'élève en tant qu'auteur d'une expression, où il soit, par rapport aux exercices précédents, davantage « créateur » de l'expression algébrique. Plus précisément, cet exercice devrait nous permettre d'apporter quelques éléments de réponse aux

[150] Un seul élève de 4ème produit toutes les associations attendues tandis qu'aucun élève de 2nde ne donne la réponse correcte à cette question.

[151] L'élève qui présente un tel profil aura, souvenons-nous, montré être capable de reconnaître l'assembleur de plus haut niveau de l'ensemble des expressions algébriques et aura produit les associations attendues à deux expressions parmi les trois proposées.

questions suivantes: l'élève utilise-t-il « spontanément » le langage algébrique pour décrire une situation mathématique donnée ? L'élève, à un niveau scolaire donné, éprouve-t-il le besoin d'utiliser l'algèbre pour modéliser une situation générale ?

Les résultats obtenus dans les deux classes montrent que peu d'élèves ont eu recours à une formule littérale pour décrire la situation mathématique que revêt le problème proposé : tant en classe de 4$^{\text{ème}}$ qu'en 2$^{\text{nde}}$, un seul élève a apporté la réponse attendue. Nous pensons que, outre les raisons évoquées plus haut, la nature du problème peut être en partie à l'origine de ces réponses, la formule littérale n'étant pas de fait indispensable à la résolution du problème. Autrement dit, il nous semble que si la situation proposée met l'élève en position d'auteur de l'expression algébrique attendue, elle ne revêt pas de caractère nécessaire, ce qui peut expliquer le nombre marginal d'élèves ayant décrit la situation à travers une formule littérale. Ainsi, le présent exercice peut-il ne pas être optimal pour répondre à la question de l'usage « spontané » de l'algèbre pour modéliser une situation donnée. Cependant, même si les résultats n'indiquent pas de différences majeures relativement au nombre d'élèves ayant produit une formule, les réponses recueillies dans les classes de 2$^{\text{nde}}$ et de 4$^{\text{ème}}$ nous révèlent différents modes d'expression utilisés par les élèves pour décrire le problème posé.

En particulier, parmi les descriptions rhétoriques produites dans les deux classes, nous pouvons noter que quelques productions fournies par les élèves de 2$^{\text{nde}}$ se rapprochent davantage de la formule littérale attendue que celles données par les élèves de 4$^{\text{ème}}$. Examinons la réponse de l'élève de 4$^{\text{ème}}$, notée 17 en annexe: « *On peut connaître le nombre de pépite en soustrayan un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble car il y a toujours une rangée de moins de pépite que de noisette et une colonne de moins.* » Cet élève fournit une description rhétorique exhaustive de la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites d'une tablette, une fois le nombre de noisettes donné. Nous avons vu qu'il n'est pas rare de trouver, parmi les réponses données par les élèves de 2$^{\text{nde}}$, des descriptions également entièrement écrites en français. Cependant, les deux types « rhétoriques » de réponses apportent des renseignements différents quant au rapport des élèves à la formule attendue. Comparons la réponse de l'élève de 4$^{\text{ème}}$, précitée, à celle de l'élève de 2$^{\text{nde}}$, notée 11 en annexe : « *Il suffit de prendre le nombre de noisettes en longueur moins une noisette pour le bord et multiplier par le nombre de noisettes en largeur moins une pour le bord.* » Cette réponse, même si elle est également écrite entièrement en français, est sensiblement différente de la réponse donnée par l'élève de 4$^{\text{ème}}$. En effet, tandis que ce dernier décrit la formule plutôt comme un processus, l'élève de 2$^{\text{nde}}$ la décrit comme s'il lisait, de gauche à droite, la formule attendue. Nous retrouvons un cas similaire illustratif du mode « quasi-littéral » de description entre pépites et noisettes dans la réponse de l'élève de 2$^{\text{nde}}$ notée 9, qui se rapproche davantage de la formule attendue: « *Si on connait le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, en faisant le nombre de noisettes en largeur-1 (car pour chaque rangés de noisettes on enleve une pépite ex : 3 noisettes -> 2 pépites) x nombre de noisettes en longueur-1 = nombre de pépite dans une tablette* ». Ici, non seulement la réponse s'éloigne de la description de type procédural retrouvée dans la majorité des réponses rhétoriques employées par les élèves de 4ème[152] , mais est également composée de symboles lettrés et opératoires. Ainsi, nous dirons qu'elle s'avère véritablement intermédiaire entre rhétorique et symbolique, non seulement de par sa forme mais également de par (l'ordre de) son contenu.

En résumé, tandis que la majorité des descriptions employées par les élèves de 4ème se révèlent être la description de la généralisation des processus employés pour résoudre les questions précédentes, certains élèves de 2nde semblent se détacher des cas particuliers rencontrés dans les questions b et c et produisent une réponse qui, bien qu'elle ne soit pas conforme à la démarche d'auteur de la formule attendue (puisqu'elle ne commence pas par l'expression de la multiplication), se rapproche davantage de l'expression littérale (x-1)x(y-1). Parmi les copies d'élèves de 2nde, nous retrouvons donc des écritures intermédiaires entre le rhétorique et le symbolique, absentes des réponses des élèves de 4ème qui utilisent, pour la plupart, un style rhétorique pour décrire la formule encore fortement lié à un processus de calcul, propre au lecteur d'une expression algébrique.

V.2.4 – <u>Conclusion et perspectives</u>

Dans la présente sous-section, nous nous limiterons à l'analyse de l'expérimentation de nature pratique (nous rappelons que les exercices n'ayant pas été testés par les élèves composent également notre travail de nature expérimentale), dans le but de confronter les résultats obtenus avec nos attentes lors de la conception de celle-ci. Ceci devrait nous permettre de mieux cerner les limites de l'expérimentation telle qu'elle a été menée et d'en proposer d'éventuels prolongements.

Souvenons-nous, dans un premier temps, des objectifs qui ont guidé la mise en oeuvre de l'expérimentation : il s'agissait d'analyser dans quelle mesure certains des exercices voués à illustrer les trois idées épistémologiques repérées pouvaient fournir de nouveaux éléments de réflexion concernant le rapport des élèves au symbolisme. Plus précisément, nous nous intéressions au double questionnement suivant : dans quelle mesure l'étude épistémologique permet-elle de mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme algébrique ? Comment ce rapport évolue-t-il au cours du temps ?

Pour ce faire, nous avons envisagé la mise en oeuvre de certains exercices à deux niveaux différents : les mêmes exercices ont à la fois été proposés à des élèves de 4ème, dont l'introduction au symbolisme est très récente, mais aussi à des élèves de 2nde, *a priori* déjà familiers avec l'écriture symbolique. Il nous semblait ainsi intéressant d'examiner, d'une part, les relations qu'entretiennent les élèves avec les écritures algébriques à un stade de l'introduction au symbolisme, en mettant en regard, d'autre part, les résultats de cette analyse avec celle relative au même questionnement adressé à des élèves de 2nde, pour qui l'étude des écritures algébriques est moins récente et plus systématique.

A ce double questionnement, nous tenterons, dans ce qui suit, d'apporter quelques réponses.

[152] Ce sont les réponses notées 9, 13, 16 et 17.

Précisons tout d'abord que l'étude du rapport des élèves au symbolisme s'est faite, dans la pratique, à partir de deux ou trois types de tâches seulement. Cependant, à travers l'examen des éléments théoriques qui figurent dans notre travail, il apparaît de façon évidente que le rapport au symbolisme ne peut être saisi à travers un nombre aussi réduit et limité de types de tâches (et d'*exercices*). D'après la diversité des travaux didactiques menés en algèbre, d'une part, et la finesse de l'analyse épistémologique relative aux écritures algébriques, d'autre part, nous ne pouvons en effet prétendre avoir recouvert les multiples aspects sous-jacents au symbolisme. Les résultats obtenus dans les deux classes doivent ainsi être interprétés comme des indices d'un certain rapport au symbolisme, lesquels seraient sans doute enrichis par la mise en place d'exercices supplémentaires, soient-ils illustratifs des même types de tâches ou de types de tâches distincts[153].

Procédons, dans un premier temps, à la mise en regard des objectifs fixés et des résultats obtenus, avant d'aborder plus en détail les limites révélées par la mise en œuvre de ce travail de nature expérimentale.

De façon générale, et comme nous l'avons souligné dans les paragraphes précédents, nous ne constatons pas, contrairement à nos attentes, une évolution significative dans les compétences des élèves des deux niveaux scolaires, à résoudre les exercices proposés (cf. V 2.3.1). Ainsi, à notre second questionnement, nous ne possédons que quelques éléments de réflexion, pour la plupart très locaux et relatifs à quelques aspects seulement des exercices traités. Cependant, c'est précisément la richesse de l'analyse de nature épistémologique qui nous permet de parfaire l'examen des diverses réponses données par les élèves, y apportant davantage de finesse. Ainsi, si à notre second questionnement nous ne pouvons apporter des réponses globales (ceci étant en partie dû aux conditions de l'expérimentation ailleurs analysées), à la question de l'apport de l'épistémologie dans l'étude du rapport des élèves au symbolisme, les réponses s'avèrent plus concluantes, tant sur le plan de la conception des types de tâches proposées, déjà soulignées, qu'au niveau de l'exploitation des données recueillies. Prenons quelques exemples.

L'idée épistémologique liée à la double ordination de l'exploration d'une écriture symbolique nous a permis, entre autres choses, d'analyser, sous le prisme des démarches analytique et synthétique, la « reconstruction » des expressions algébriques par l'élève de 4ème, fussent-elles données en français ou sous forme symbolique. En d'autres mots, à travers cette étude, nous avons pu non seulement déceler les différentes étapes dans la re-construction phrasée de l'élève d'une expression algébrique donnée mais aussi dégager celles intervenues dans la reconstruction symbolique d'une expression initialement donnée sous forme rhétorique.

En effet, lorsque l'élève part de la synthèse vers l'analyse, nous avons observé que celui-ci n'attribue pas immédiatement les différents niveaux aux assembleurs en jeu dans l'expression. Plus précisément, si l'élève commence par traduire l'assembleur de plus haut niveau en langage naturel, la suite de sa traduction est encore fortement influencée par sa position de lecteur et s'avère un mélange

[153] Nous reviendrons sur ce point par la suite.

entre analyse et synthèse (comme dans exemple :« la somme de a au carré plus b au carré »). L'élève traduit ensuite, dans une démarche propre à l'auteur, l'assembleur de niveau immédiatement inférieur (dans l'exemple précité, correspondant à la somme), mais abandonne momentanément cette position pour traduire l'expression telle qu'il la lit (« a au carré plus b au carré »). Ce n'est que dans un second temps que l'élève homogénéise sa « position » et propose la phrase attendue en suivant le modèle des autres phrases proposées dans l'énoncé, correspondant à la description de l'interprétation de l'auteur de l'expression.

En ce qui concerne la reconstruction symbolique d'une expression donnée en langage naturel, nous avons observé que l'élève ne traite pas l'intégralité de la phrase fournie et qu'il semble avoir besoin, pour mener à bien sa lecture, de représenter (mentalement ou symboliquement) chaque symbole lu, au fur et à mesure qu'il progresse (comme pour la phrase « la somme des tiers des carrés de a et b », que l'élève lit: « c'est la somme... des tiers... donc la somme. Donc deux expressions mis... »). Lors de cette même démarche de reconstruction symbolique, nous avons également mis en évidence la présence de traductions intermédiaires entre le rhétorique structural fourni et la représentation symbolique à produire, vraisemblablement nécessaires dans la démarche de l'élève, correspondantes à une lecture linéaire de l'expression algébrique (comme pour la phrase « l'inverse du produit de a et b », où l'élève passe par une traduction rhétorique « linéaire » - « un sur a fois b » - avant de produire l'expression symbolique attendue).

En ce qui concerne l'apport de l'étude épistémologique dans l'analyse du rapport des élèves au symbolisme, nous pouvons finalement dire que la finesse de celle-là nous a également permis de distinguer entre quelques réponses d'élèves qui auraient pu être mis à première vue sur le même plan.

Relativement à l'exercice intitulé « exercice 1 », d'abord, ceci nous a conduit à distinguer certains profils d'élèves non plus en fonction du nombre d'associations correctes sur l'ensemble des expressions proposées, mais essentiellement en fonction de la reconnaissance des différents niveaux des assembleurs en jeu.

Ensuite, en ce qui concerne l'exercice portant sur l'usage des lettres dans la résolution d'un problème, l'analyse épistémologique nous a aidé à distinguer plus finement les écritures rhétoriques fournies par les élèves, en distinguant notamment quelques productions de $4^{ème}$ de celles de 2^{nde} qui, bien qu'étant écrites entièrement en français, différent de par l'ordre de présentation des assembleurs (ce cas, souvenons-nous, peut être illustré par les descriptions de $4^{ème}$ et de 2^{nde}, respectivement : « *On peut connaître le nombre de pépite en soustrayan un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble car il y a toujours une rangée de moins de pépite que de noisette et une colonne de moins.* », « *Il suffit de prendre le nombre de noisettes en longueur moins une noisette pour le bord et multiplier par le nombre de noisettes en largeur moins une pour le bord.* ») . Cela nous a conduit à considérer un type de description intermédiaire entre le rhétorique et symbolique qui tient compte non seulement de la présence de symboles dans le texte produit, mais qui considère aussi l'ordre dans lequel apparaissent les traductions des différents assembleurs.

Ainsi, nous avons vu que si l'expérimentation menée nous renseigne moins sur l'évolution du rapport au symbolisme telle que nous l'avions envisagée, elle fournit certains éléments de réponse à la question de l'apport de l'épistémologie dans l'examen de cette relation.

L'analyse *a posteriori* des réponses d'élèves a, comme nous l'avons annoncé, également révélé quelques limites de l'expérimentation, qui s'avèrent de deux natures distinctes, relatives aux énoncés des exercices proposés, d'une part, et aux conditions de l'expérimentation telle qu'elle a été menée, d'autre part.

En ce qui concerne l'exercice des tablettes de chocolat, il est important d'évoquer une caractéristique déjà soulignée dans ce qui précède: le caractère non nécessaire à la résolution du problème, de la représentation symbolique de la formule exprimant le lien entre pépites et noisettes. Il nous semble, en effet, que le nombre peu élevé de réponses où interviennent des symboles mathématiques, à la fois repéré tant dans la classe de $4^{\text{ème}}$ qu'au niveau de la 2^{nde}, peut s'avérer moins relatif à une faible maîtrise du symbolisme de la part des élèves et davantage lié au caractère accessoire de la production de l'expression algébrique. Ceci nous conduirait alors à envisager une nouvelle hypothèse: la production effective de la formule attendue par certains élèves est davantage révélatrice d'une bonne maîtrise du symbolisme par les élèves, étant donné le faible degré de contrainte, à ce niveau, apporté par l'énoncé. L'analyse *a posteriori* des réponses des élèves, et plus particulièrement de celles des élèves $4^{\text{ème}}$, a également montré l'importance de certaines variables didactiques dans la conception de cet exercice, et plus exactement du nombre de pépites considéré dans la question: "existe-t-il des tablettes contenant 7 pépites de chocolat? Si oui, lesquelles?". Nous avons vu que la nature du nombre choisi dans cette question joue un rôle non négligeable dans la réussite de celle-ci, et plus précisément que les nombres premiers se révèlent de véritables obstacles pour un bon nombre d'élèves.

Relativement à l' « exercice 1 », ensuite, nos hypothèses se sont avérées, par moments, limitées par la présentation de l'énoncé même. Plus précisément, le fait d'avoir mis en regard plusieurs expressions algébriques et différentes phrases en français susceptibles de les traduire à l'intérieur d'une même question, nous conduisait bien souvent à des impasses quant à la détermination des motivations réelles des élèves à effectuer de tels choix. En d'autres mots, nous étions bien souvent dans l'incapacité de distinguer les élèves ayant procédé à un choix réel de ceux qui auraient procédé par élimination.

De la mise en évidence des limites ainsi que de la richesse de certaines composantes de l'expérimentation menée, se dessinent de façon presque naturelle les perspectives envisageables à celle-ci. Nous évoquerons tout d'abord la nécessité, évidente, de mener l'expérimentation présente auprès d'une population plus large d'élèves, afin de mieux distinguer les données particulières à notre échantillon de celles plus représentatives des niveaux scolaires étudiés. Ceci devrait par ailleurs nous conduire vers des hypothèses plus concluantes quant à l'évolution du rapport des élèves au symbolisme. Ensuite, comme nous l'avons évoqué en début de paragraphe, si nous souhaitons élargir notre questionnement relatif au rapport des élèves au symbolisme algébrique sans nous limiter aux quelques aspects identifiables dans les exercices ici proposés, il est impératif que ces derniers soient complétés par d'autres, soient-ils relatifs aux même types de tâches ou, au contraire, à d'autres types de tâches. Nous pouvons aussi, de façon plus générale, envisager la conception de types de tâches relatives désormais à d'autres idées épistémologiques que celles ici exposées. Finalement, l'analyse *a priori* et celle *a posteriori* des réponses données par les élèves aux différents exercices ont révélé l'importance de certaines variables didactiques dans l'élaboration de ceux-ci. Il nous semble désormais important de procéder à une identification plus systématique des variables et d'étudier leurs effets.

Dans le chapitre suivant, nous exploiterons quelques unes de ces perspectives, dans un environnement qui nous semble particulièrement bien adapté pour apporter quelques éléments de réponses à certaines des questions envisagées ci-dessus: l'environnement informatique, et plus précisément dans les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH).

CHAPITRE VI - DES PERSPECTIVES POUR UNE APPLICATION DANS UN DOMAINE PARTICULIER : LES EIAH

l

Les résultats issus de notre expérimentation ont pointé, nous l'avons vu, divers prolongements possibles pour celle-ci. Tout d'abord nous ressentons la nécessité, évidente, de mener l'expérimentation en cours auprès d'une population pus large d'élèves, afin de nous dégager de la spécificité de notre échantillon pour tâcher de cerner des caractéristiques véritablement représentatives des niveaux scolaires étudiés. Ceci devrait nous conduire à formuler des hypothèses plus décisives quant à l'évolution du rapport des élèves au symbolisme. Ensuite, si nous souhaitons élargir notre questionnement relatif au rapport des élèves au symbolisme algébrique sans nous limiter aux quelques aspects identifiables par les exercices proposés, il nous semble impératif que ces derniers soient complétés par d'autres (relatifs aux même types de tâches ou, au contraire, à d'autres). Finalement, les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses données par les élèves aux différents exercices ont révélé l'importance de certaines variables didactiques dans l'élaboration de ceux-ci (notamment la complexité des expressions algébriques en jeu).

C’est à partir de ce dernier questionnement que nous avons amorcé le prolongement de notre travail, objet du présent chapitre, en procédant à une identification plus systématique des variables et en étudiant leurs effets. Après avoir présenté, dans une première partie, la problématique de notre étude (ses motivations « internes » et « externes » –projet *Lingot*), nous exposerons quelques éléments de réflexion à propos de l'étude de la génération automatique d'expressions de *niveau deux*, pour enfin en dégager quelques résultats, tout en examinant l'exploitation de cette analyse dans l'environnement informatique.

VI.1 – La génération automatique des de familles de tâches à travers un exemple. Un emprunt à l'Art combinatoire

VI.1.1 – Présentation de la problématique

La double analyse, épistémologique et didactique, relative au symbolisme algébrique, d'abord mise en évidence sur le plan théorique dans les chapitres initiaux de notre travail, s'est vue élargie dans la pratique dans le chapitre précédent à travers l'étude, aussi bien de la conception que de la mise en œuvre, dans les classes de 4ème et de 2nde d’un certain nombre d’exercices inspirés par elle.

Ce faisant, et plus particulièrement à travers l'analyse de la conception des exercices envisagés, nous avons été conduits, entre autres choses, à considérer la complexité des différentes expressions algébriques proposées, en suggérant notamment que cette notion est intimement liée au type de tâche instancié par l'exercice, ainsi qu'à l'environnement dans lequel celui-ci est proposé (papier-crayon, informatique, etc.). En effet, en ce qui concerne les exercices voués à illustrer l'idée épistémologique relative aux deux démarches d'exploration d'une écriture algébrique (notés T1 à T5) en particulier, nous avons vu que, si pour certains, le niveau de l'expression algébrique[1] est déterminant de leur complexité (notamment dans l'exercice T5, où il s'agit de mettre en regard expressions algébriques et descriptions en langage naturel), pour d'autres, c'est l'analyse de l'arborescence de l'expression -et en particulier la richesse ou pauvreté des ramifications- qui viendra la déterminer (tel est le cas de l'exercice T1, où il s'agit de décrire une expression algébrique à travers un algorithme[2]).

L'analyse de la complexité des expressions proposées dans les différents types de tâches semble ainsi nous conduire vers un questionnement plus spécifique, relatif aux divers éléments constitutifs des expressions algébriques[3], mettant en rapport trois éléments qui sont apparus, dans le chapitre précédent, comme étant intimement liés : le type de tâche envisagé, la nature des éléments constitutifs des expressions en jeu et la complexité de celles-ci. Ce questionnement peut s'étayer par les interrogations suivantes: un type de tâche étant donné, quelle(s) complexité(s) peut-on envisager pour les expressions en jeu? Quels sont les éléments qui déterminent cette complexité (niveau de l'expression, ramification de son arborescence, etc.)? De façon plus précise : quelles sont les "variables"[4] des expressions algébriques sur lesquelles nous pouvons jouer de façon à garder une certaine pertinence à la tâche proposée et dans quelle mesure les variations apportées sur certains éléments d'une expression algébrique influent-elles sur la complexité de celle-ci ? Finalement, en reprenant la problématique posée dans le chapitre précédent : quelles sont les limites des instantiations de certains types de tâches proposés et dans quelle mesure peut-on, à partir d'un modèle donné, en générer d'autres ?

Ce questionnement multiple, auquel nous avons fourni quelques éléments de réponse dans le chapitre précédent et que nous nous proposons ici d'explorer de façon plus détaillée, s'est par ailleurs vu trouver un champ d'application de toute autre nature. L'analyse approfondie de certains types de tâches et du niveau de complexité des expressions qui les composent ont en effet suscité l'intérêt de chercheurs en EIAH qui, travaillant sur la modélisation et le développement d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage de l'algèbre[5], ont perçu dans cette analyse un point

[1] Tel qu'il a été défini dans IV.1.4.
[2] Exprimé en langage naturel. En effet, lorsqu'il s'agissait de la variante *T1 bis* de cet exercice, présentée sous une forme du type informatique très élémentaire, nous avons vu que la complexité des expressions est à nouveau intimement liée au niveau de celles-ci, étant donné que cette variante prend uniquement en compte les expressions se traduisant par un enchaînement "linéaire" d'instructions et où les opérateurs sont traités comme étant unaires.
[3] Nous regrouperons les différents éléments des expressions algébriques en deux catégories : les assembleurs (qui, ici, n'excèderont pas le niveau trois) et les « formes » venant occuper les places ouvertes par ces assembleurs, pouvant être des lettres ou des nombres.
[4] En ce sens qu'elles varient.
[5] Projet *Lingot*, en cours, présenté en annexe.

d'appui qui semblait leur permettre de générer de façon automatique un ensemble de tâches susceptibles d'être proposées à des élèves.

Le dernier volet de notre travail, objet du présent chapitre, sera essentiellement articulé autour de trois parties. Après avoir exposé, dans un premier temps, la problématique de notre travail et précisé la méthodologie employée, nous nous proposons, dans la deuxième section, d'amorcer le questionnement multiple *supra* énoncé à partir d'une question plus spécifique, relative à l'examen de certains éléments considérés comme « variables » dans les expressions algébriques, dans un type de tâche donné. Plus précisément, nous aborderons dans cette section la question des implications des diverses variations possibles sur le type de tâche concerné, guidés par une éventuelle application informatique de notre réflexion. Dans la dernière section enfin, nous proposerons quelques perspectives d'applications de notre travail dans le domaine des EIAH, compte tenu des résultats issus de notre analyse.

Nous souhaitons finalement souligner que cette dernière partie de notre travail s'appuie sur une réflexion récente. A l'instant où nous écrivons ce manuscrit, le projet dans lequel cette réflexion a vu le jour est encore dans sa première année; les résultats s'avèrent ainsi encore fragiles et partiels et nécessitent de façon évidente une certaine maturation. De ce fait, le lecteur avisé interprétera ce qui suit comme des indices pour mener une réflexion autour d'un thème qui, indubitablement, mérite d'être enrichi.

VI.1.2 – Sur le choix de l'exemple et la méthodologie employée

Le questionnement que nous nous proposons d'aborder, relatif à l'étude des variations qui peuvent être envisagées à des expressions algébriques figurant dans différents types de tâches, sera instancié à travers l'examen concernant un type de tâche précis : celui de la traduction, en langage naturel, d'expressions algébriques données. Cette restriction, notons-le, n'est pas le fait du hasard. Si le questionnement nous ayant guidé dans cette étude plus systématique des expressions algébriques s'est initialement porté sur divers types de tâches, nous avons choisi d'aborder celui-ci dans un contexte spécifique, où les variations apportées aux écritures symboliques semblent avoir des implications de nature diverse qui débordent le seul cadre de la « bonne formation » des expressions. En effet, de par la nature du type de tâche dont il est question, les modifications sur les expressions algébriques se voient réfléchies dans une modification des phrases correspondantes énoncées en français, lesquelles pourraient, en retour, servir d'appui pour déterminer et réguler les limites des modifications apportées aux expressions algébriques. Ainsi, même si ce choix se présente comme étant une restriction dans l'ensemble des interrogations énoncées *supra*, il semble concentrer des questionnements transversaux susceptibles d'émerger de façon isolée dans l'examen des autres types de tâches, et c'est pourquoi nous l'avons retenu pour illustrer notre questionnement.

Ceci étant dit, nous sommes désormais capables de préciser davantage l'objectif que nous nous sommes fixé : il s'agit ici d'exhiber quelques éléments d'analyse portant sur les variations qui peuvent être envisagées aux expressions algébriques intervenant dans les exercices du type « associer une expression algébrique à son équivalente en français ». Or, si notre objectif s'est vu davantage précisé, les différents éléments qui le constituent n'en sont pas plus clairs. Plus précisément, la question qui se pose désormais est la suivante : quelles sont les expressions susceptibles de subir les modifications? En d'autres mots, quelles sont les expressions en jeu dans ce type de tâche pour lesquelles nous proposerions des variations?

La réponse à cette question, point d'entrée dans la méthodologie ultérieurement employée, renvoie au triplet évoqué par ailleurs : la nature du type de tâche, les expressions algébriques et la complexité de celles-ci. Dans le chapitre précédent, nous avons en effet vu que les expressions algébriques en jeu dans ce type de tâche ne pouvaient présenter un niveau supérieur à trois, la traduction rhétorique de celles-ci devenant très rapidement complexe et l'exercice alors difficilement abordable par la plupart des élèves auxquels il serait théoriquement destiné, et de plus trop artificiel pour rester pertinent. Ainsi, le choix des expressions étant directement lié à leur complexité et celle-ci étant, pour ce type de tâche, en étroit rapport avec le niveau des expressions (cf. chapitre V), l'ensemble des expressions susceptibles de subir des modifications seront celles de niveau deux et trois. Dans ces conditions, notre objectif se précise comme suit : nous nous proposons d'exhiber quelques éléments d'analyse portant sur les variations qui peuvent être envisagées aux expressions algébriques de niveau deux ou trois intervenant dans le type de tâche « associer à une expression algébrique son équivalente en français ».

Envisager des modifications, dans un type de tâche donné, d'expressions algébriques et étudier leurs effets requiert l'identification préalable des variables de ces expressions. Les changements étant effectués sur le plan syntaxique des expressions, nous nous servirons d'un examen se situant initialement au niveau combinatoire des signes composant lesdites expressions. La procédure que nous nous proposons de mettre en œuvre rejoint en quelque sorte, nous le verrons, le principe sous-jacent à l'Art combinatoire de Leibniz. De façon analogue à celui-ci, nous procèderons à une analyse dont la motivation se place au niveau combinatoire ; il s'agit de procéder à des substitutions presque aveugles des différentes « variables » présentes dans les expressions algébriques. Cependant, l'analogie ne peut être prolongée : comme nous le verrons, l'étude que nous menons ne se limite pas au registre combinatoire, les questions de pertinence didactique des expressions[6] étant en effet à l'origine de ce que nous dénommerons « contagion sémantique » dans notre analyse.

Nous regrouperons les différents éléments des expressions algébriques en deux catégories: les assembleurs (qui, dans notre cas, n'excèderont pas le niveau trois) et les formes (qui peuvent être des lettres ou nombres) venant occuper les places ouvertes par ces assembleurs. Par ailleurs, nous distinguerons les assembleurs binaires (commutatifs et non commutatifs) des assembleurs unaires[7].

[6] Si nous considérons l'application pratique ultérieure envisagée dans le cadre du projet *Lingot*.

[7] Compte tenu du niveau scolaire des élèves à qui ce type de tâche est théoriquement destiné, nous considérerons dans ce qui suit, parmi les assembleurs unaires, uniquement ceux relatifs à l'extraction de la racine carrée, à

Dans un premier temps, intéressons-nous aux expressions algébriques de niveaux deux et étudions quelques différentes variations possibles de telles expressions algébriques.

VI.2 – L'analyse systématique des expressions de niveau deux – *Incipit*

L'objectif de cette section est, comme nous l'avons annoncé, d'étudier les variations obtenues à partir de divers changements appliqués aux expressions et leurs effets, compte tenu du contexte dans lequel elles sont posées, *i.e.*, la traduction de celles-ci dans le langage naturel. Nous rappelons toutefois au lecteur que cette analyse est uniquement la base d'une réflexion dont nous proposons ici quelques éléments. Ainsi, cette étude ne présente pas le caractère exhaustif duquel nous avons toutefois tenté de nous rapprocher. Nous veillerons, tout au long de notre exposé, à mettre en évidence les facteurs qui nous semblent déterminants dans cette étude et de pointer les passages où une étude exhaustive semble nécessaire.

Étant donné les différents types d'éléments constitutifs des expressions algébriques, les modifications sur celles-ci peuvent se faire à deux niveaux différents: sur les assembleurs, d'une part ou sur les formes, de l'autre. Prenons un exemple : pour l'expression de niveau deux « $(a+b)^2$ », nous pouvons aussi bien envisager des modifications affectant les assembleurs (remplacer le signe d'addition par celui de la division) que celles affectant les formes (remplacer la lettre *a*, par exemple, par un nombre donné)[8].

Analysons, dans un premier temps, les implications d'un éventuel changement affectant les formes de l'expression[9].

VI.2.1 – Les différentes modifications appliquées aux formes

Les formes peuvent être de deux types différents : des nombres ou des lettres. Trois types de changements sont alors à envisager : le changement du type lettre-lettre (c'est-à-dire qu'à la place d'une lettre vient se substituer une lettre différente), le changement du type lettre-nombre (c'est-à-dire qu'à la place d'une lettre vient se substituer un nombre ou vice-versa) et le changement du type nombre-nombre (à la place d'un nombre vient se substituer un nombre distinct)[10].

---

l'élévation du carré et à l'application de l'opposé. De même, les assembleurs binaires ici considérés se restreindront aux assembleurs relatifs aux quatre opérations dites élémentaires: l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Afin de rendre notre étude plus claire, nous convenons que les nombres considérés seront dépourvus de tout autre signe, les nombres seront en fait puisés parmi l'ensemble des nombres entiers naturels.

[8] Nous invitons le lecteur à considérer le tableau nous ayant servi dans nos réflexions, proposé en annexe, regroupant les différentes arborescences combinatoires possibles d'une expression de niveau deux. Ce tableau sera repris plus loin dans cette section, et explicitement exploité.

[9] Nous rappelons qu'il s'agit de ne pas perdre de vue, lors de l'analyse des effets qu'entraînent les modifications envisagées, le contexte (le type de tâche) dans lequel l'expression figure, c'est-à-dire la traduction de l'expression en termes rhétoriques.

[10] Bien que notre procédure s'avère, de par sa nature systématique de substitution, en quelques points similaires au principe trouvé dans l'Art combinatoire, nous ne traduirons pas les modifications du type lettre-nombe ou

Commençons par l'analyse de la première substitution envisagée: celle du type lettre-lettre.

VI.2.1.1 – La substitution du type lettre-lettre

Dans le cas où l'expression algébrique sur laquelle portent les modifications ne comporte qu'une seule lettre (par exemple: $\sqrt{a^3}$), le changement de celle-ci en une autre puisée dans l'alphabet n'a aucune incidence sur la complexité de l'expression ni sur sa traduction en langage naturel.

Dans le cas où, au contraire, plusieurs lettres figurent, cette substitution du type lettre-lettre peut avoir des incidences sur la sémantique de celle-ci. Ceci se produira en effet dans le cas où l'on viendrait substituer une lettre par une autre déjà présente dans l'expression. Ainsi, par exemple, la substitution de la lettre a par la lettre b dans l'exemple supra ($(a+b)^2$) non seulement a une incidence sur la syntaxe de celle-ci (comme c'est évidemment le cas pour toutes les substitutions), mais implique, dans notre contexte, la nécessité de faire appel, lors du changement de sa traduction en termes rhétoriques, au sens de celle-ci. En effet, compte tenu du caractère didactique du contexte, nous ne parlerons plus du "carré de la somme de *b* et *b*", peu pertinente pour être proposée à des élèves, mais plutôt du "carré du double de *b*". Ceci illustre ce que nous avons dénommé plus haut de « contagion sémantique ». Notons enfin que les expressions de niveau deux peuvent présenter deux, trois ou quatre lettres distinctes (comme par exemple dans les expressions suivantes: $2a+bc$, $\frac{ab}{c-d}$). La remarque concernant l'exemple précédent, où figurent deux lettres seulement, peut donc s'étendre aux autres cas, que nous ne traiterons toutefois pas ici, mais pour lesquels nous nous contentons de fournir le commentaire général suivant. La substitution du type lettre-lettre pourra avoir des implications sur la traduction de l'expression en langage naturel[11] dans le cas où au moins un des assembleurs est binaire et où les places ouvertes par celui-ci sont remplies par deux lettres.

Poursuivons notre étude à travers l'examen de substitutions du type nombre-nombre.

VI.2.1.2 - La substitution du type nombre-nombre

Nous verrons, dans ce qui suit, que notre regard, auparavant centré sur une éventuelle coïncidence que le nombre à substituer pourrait avoir avec un autre nombre déjà présent dans l'expression (en analogie avec le cas pour les substitutions du type lettre-lettre précédemment traité), va désormais porter sur l'assembleur rattaché au nombre à substituer[12]. La substitution du type

nombre-lettre en termes d'instantiation ou littéralisation, comme nous l'avons fait lors de l'analyse épistémologique des procédures adoptées par Leibniz. En effet, si le terme d'instantiation, par exemple, traduit une substitution **à toutes les occurrences** d'une certaine lettre, d'un chiffre donné, les substitutions envisagées ici sont traitées pour les différentes formes au cas par cas, même si les formes apparaissent réitérées dans l'expression. Les substitutions envisagées seront, dirons-nous, locales, contrairement à celles retrouvées dans l'ouvrage de Leibniz (ce qui d'ailleurs rendit possible la traduction des littéralisations, sur le plan combinatoire, en canonisations, sur le plan sémantique). Nous reviendrons par la suite sur ce point.

[11] Dans la mesure où, pour traduire rhétoriquement ladite expression, nous avons décidé de faire appel au sens de celle-ci.

[12] Ce sont les "nœuds", dans la théorie des graphes, auxquels cette forme (feuille) est directement liée.

nombre-nombre va produire, nous le verrons, essentiellement deux implications distinctes, toutes deux rattachées à la particularité de l'assembleur directement lié au nombre à substituer. Tandis que le premier type d'incidence portera sur la traduction rhétorique des expressions algébriques, l'autre s'avèrera relatif au niveau de celles-ci, et donc à la complexité des expressions proposées. Nous analyserons d'abord ces deux types d'incidences de façon distincte, et noterons ensuite quelques modifications qui impliquent un changement sur l'assembleur même considéré, à travers l'examen du cas de la soustraction.

Analysons, dans un premier temps, à travers quelques exemples, l'**incidence de la substitution du type nombre-nombre sur la traduction rhétorique de l'expression**. Pour ce faire, rappelons les assembleurs en jeu dans les expressions de niveau deux que nous nous proposons d'examiner : ce sont les signes relatifs à l'addition, la soustraction, au produit, à la division, à la racine carrée, à l'opposé et aux puissances (l'élévation au carré et au cube)[13].

Parmi ceux-ci, deux assembleurs confèrent à certains nombres un « statut » particulier.

Celui relatif au produit va, d'une part, accorder aux nombres 2 et 3 (si nous nous limitons aux niveaux scolaires de la 4ème à la 2nde pour lesquels l'application de ce type de tâche peut être envisagée de façon privilégiée) un statut particulier dans la traduction rhétorique de l'expression: celui du « double » et du « triple ». Ainsi, si on considère une expression initiale telle $5x+2$, remplacer le nombre 5 par le nombre 2 impliquera une modification dans sa traduction rhétorique qui n'est pas liée à la présence du second nombre 2 dans l'expression initiale (en analogie avec le cas de la modification lettre-lettre), mais qui est plutôt liée à la nécessité de faire appel au sens de la multiplication de l'expression. Ainsi, ce qui était initialement décrit en termes de produit (« le produit de 5 par *x* ») présente désormais un « raccourci »: le « double de *x* ». Un raisonnement analogue sera applicable à la substitution par le nombre 3, dans les mêmes conditions.

Lorsqu'on a affaire à la division, d'autre part, il s'agit de distinguer deux cas, selon que le nombre substituant vient s'inscrire au numérateur ou, au contraire, au dénominateur du quotient. Dans le premier cas, une attention particulière devra être portée au nombre 1. Prenons, par exemple, l'expression suivante: $\frac{4}{\sqrt{a}}$ et effectuons une substitution du type nombre-nombre. Si nous remplaçons le nombre 4 par le nombre 1, la modification au niveau de la traduction en termes rhétoriques se fait comme suit : au lieu de considérer « le quotient de 1 par la racine carrée de a », nous dirons plutôt « l'inverse de la racine carrée de a ». Le deuxième cas, où un nombre viendrait substituer un autre occupant la place du dénominateur du quotient, est analogue à l'étude du double et du triple produit : lorsque le nombre substituant est 2 ou 3, la traduction en langage naturel de l'expression finale se fait en termes de « moitié » et « tiers », respectivement. Dans les deux cas, la substitution effectuée au niveau combinatoire de l'expression trouve des incidences sur la traduction rhétorique de celle-ci.

[13] Notons au préalable que nous n'étudierons pas ici les questions portant sur l'ensemble de définition des expression, au demeurant essentielles pour compléter notre réflexion.

Considérons à présent les **implications sur le plan de la complexité des expressions**.

De façon générale, nous pouvons dire que lorsque le nombre substituant est l'unité ou ce que nous dénommerons d' « élément absorbant » de l'assembleur qui lui est directement rattaché, la substitution du type nombre-nombre pourra avoir une répercussion sur le niveau de l'expression considérée et, plus précisément, entraîner la diminution d'un niveau.

Ainsi, en ce qui concerne le produit, par exemple, notre attention portera sur les nombres 1 et 0.

Considérons le cas de l'expression énoncée *supra* : « 5*x*+2 ». Remplacer le nombre 5 par 1 nous conduit à l'expression suivante: « 1*x*+2 ». La traduction en langage naturel de cette dernière demande également un appel au sens et, guidés par le caractère didactique du contexte[14], nous ne dirons pas « la somme de 2 et du produit de un par *x* », mais plutôt « la somme de 2 et de *x* ». Or ce faisant, la substitution amorcée sur le plan formel a trouvé une incidence sur le plan de la complexité: l'expression initialement envisagée, de niveau deux, s'est en effet transformée en une expression de niveau un. Ainsi, si nous souhaitons garder une uniformité quant à la complexité relative à ce type de tâche, initialement établie à partir du niveau des expressions algébriques en jeu, il est indispensable de considérer le cas particulier de la substitution d'un nombre donné par le nombre 1 lorsque l'assembleur qui lui est directement associé est relatif à l'opération de multiplication.

La substitution, dans une multiplication, d'un nombre par le nombre « 0 » pourra également entraîner une diminution de niveau. Or ceci ne sera plus le résultat de l'examen de la pertinence didactique de l'expression, mais plutôt de l' «interprétation sémantique » de celle-ci. En effet, dans l'expression « 5*x*+2 », remplacer le nombre 5 par le nombre 0 nous conduit, après avoir fait appel au sens de l'expression, à l'expression de niveau zéro : « 2 ».

Considérons à présent les expressions où figure un quotient.

De façon analogue à la multiplication, la substitution d'un nombre donné par le nombre 1 peut entraîner la diminution d'un niveau si le nombre à substituer est le dénominateur d'un quotient. Ainsi, dans l'expression *bh*/2, remplacer le nombre 2 par le nombre 1 revient à considérer une expression, désormais de niveau 1, pouvant se traduire par : « le produit de b par h ». De même, inscrire le nombre « 0 » à la place d'un nombre occupant le numérateur d'un quotient, entraînera la diminution de niveau. Mais à nouveau, soulignons-le, ce sont des motivations de nature différentes (interprétation sémantique et pertinence didactique) qui sont à l'origine des deux cas traités ici.

Examinons à présent le cas de la somme.

Lorsque, dans une expression algébrique, l'assembleur de niveau un est relatif à la somme, nous devons traiter le cas particulier de la substitution d'un nombre par zéro. A travers un raisonnement similaire à ceux exposés ci-dessus, nous pouvons dire que dans le cas d'une substitution du type nombre-nombre où le nombre substituant est zéro, lorsque celui-ci vient remplacer un nombre rattaché à l'assembleur relatif à la somme, la modification appliquée sur le plan syntaxique de l'expression entraîne un changement dans la complexité de celle-ci. En reprenant le cas envisagé précédemment, où l'expression initiale est $5x+2$, en substituant le nombre 2 par 0, nous obtenons l'expression de niveau un dont la traduction peut être : « le produit de 5 par x ».

Finalement, parmi les substitutions du type nombre-nombre, nous devons considérer un cas particulier : celui où l'assembleur directement lié au nombre substitué est une soustraction. Etant un cas particulier de l'addition, les réflexions menées précédemment concernant les substitutions d'un nombre donné par zéro restent valables. Nous verrons cependant que certaines substitutions du type nombre-nombre dans le contexte particulier de la soustraction non seulement ont des implications relatives à la complexité des expressions en jeu, mais présentent également des **conséquences sur la « nature » de l'assembleur en jeu**. Prenons un exemple : considérons l'expression suivante : $b/(3-a)$. Si on substitue le nombre 3 par le nombre zéro, l'assembleur de niveau un, auparavant binaire et relatif à l'opération de soustraction devient désormais unaire et relatif à l'affectation de l'opposé de la seconde « forme » qui lui était rattachée. La réflexion menée pour l'exemple supra cité peut se généraliser pour toute substitution du type nombre-nombre, lorsqu'au nombre occupant la place à l'amont de l'assembleur relatif à la soustraction vient se substituer le nombre zéro.

VI.2.1.3 - La substitution du type lettre-nombre

Nous observons, dans ce qui précède, que les implications issues des différentes substitutions sont essentiellement liées aux substituantes, plutôt qu'aux substituées. Dans VI.2.1.2, par exemple, nous avons cité quelques effets provenant de substitutions où le chiffre 1 viendrait occuper une des places ouvertes par l'assembleur relatif au produit. Nous avons également vu, dans VI.2.1.1, que certaines substitutions du type lettre-lettre dans une expression peuvent être à l'origine d'altérations de la traduction rhétorique de celle-ci, en particulier dans certains cas où la lettre substituante est retrouvée ailleurs dans l'expression. Ainsi, comme nous l'avions déjà évoqué, notre étude ne peut se traduire en termes de chiffrages ou de littéralisations : elle ne se fait pas dans le seul registre combinatoire des expressions.

Le troisième type de substitution que nous nous proposons ici d'aborder se dédouble en deux cas distincts : ce sont, d'une part, les substitutions d'un nombre par une lettre ou, d'autre part, d'une lettre par un nombre. Ainsi, le troisième type de modification appliqué sur les formes des expressions, où la substituante peut être un nombre ou une lettre, se présente comme une sorte de combinaison des cas précédemment étudiés. De ce fait, les incidences portant sur les expressions (sur leur complexité, sur leur traduction rhétorique, etc.) ici envisagées découleront des analyses précédentes. Plus précisément, lorsque la substitution sera du type lettre-nombre, où à une lettre donnée viendra s'inscrire un nombre déterminé, les implications sur les expressions seront celles étudiées dans le cas nombre-nombre. De façon analogue, les cas présentés dans la substitution du type lettre-lettre

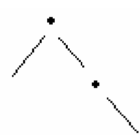
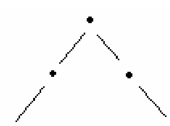
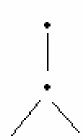
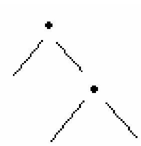
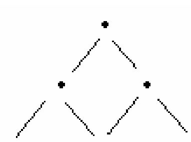
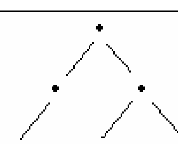
[14] Qui nous induit à réécrire $1x+2$ sous la forme $x+2$.

viendront renseigner sur celle du type nombre-lettre, où à la place d'un nombre donné viendra s'inscrire une lettre.

VI.2.2 – Les différentes modifications appliquées aux assembleurs

Après avoir fourni quelques pistes pour l'étude des modifications engendrées par des substitutions appliquées aux formes d'une expression de niveau deux, il s'agit désormais d'étudier les effets issus de certaines modifications appliquées aux assembleurs de l'expression. A l'instar de l'analyse exposée dans les paragraphes précédents, nous ne procèderons pas de façon exhaustive, mais veillerons plutôt à dégager quelques axes de recherches qui nous semblent porteurs d'intérêt, susceptibles d'apporter quelques éléments de réponse à notre questionnement en ce qui concerne les variations qui peuvent être envisagées aux expressions algébriques de niveau deux intervenant dans le type de tâche « associer à une expression algébrique son équivalente en français ».

Rappelons que les assembleurs considérés ici peuvent être de deux sortes différentes : unaires ou binaires. Les deux seules sortes de substitutions affectant les assembleurs seront donc, compte tenu de la combinatoire de ceux-ci, celles que nous appellerons de type unaire-unaire (où un assembleur du unaire vient remplacer un autre assembleur unaire) ou du type binaire-binaire. Dans ce qui suit, nous nous servirons du tableau ci-après, déjà mentionné, qui regroupe les différentes arborescences combinatoires d'une expression de niveau deux présentées selon la nature (binaire ou unaire) de l'assembleur considéré à chaque niveau.

	Assembleur de niveau 2		
Assembleur de niveau 1	Unaire	Binaire	
		Un seul assembleur de niveau 1	Deux assembleurs de niveau 1
Unaire	(1)	 (2)	 (3)
Binaire	 (4)	 (5)	 (6)
			 (7)

Légende : Les différentes arborescences combinatoires sont notées de 1 à 7[15]. Les « points » représentent les assembleurs (le sommet de chaque arbre correspond à l'assembleur de niveau 2) et les « traits » désignent les places ouvertes par chaque assembleur. Les extrémités des « traits » représentent donc les feuilles de l'arbre, pouvant être des lettres ou des nombres. Nous avons choisi de ne pas les représenter explicitement.

Dans un souci de clarté d'exposé, nous procèderons à l'analyse de quelques modifications appliquées aux assembleurs d'après le type de substitution envisagé. Nous verrons cependant que les implications de telles substitutions s'avèrent moins liées à la nature de ces dernières (*i.e.* unaire-unaire ou binaire-binaire) qu'à celle des assembleurs, dès lors que ceux-ci se succèdent dans l'arborescence.

Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à l'exposé de quelques substitutions du type unaire-unaire[16].

Les expressions de niveau deux concernées par une substitution du type unaire-unaire sont celles où au moins un assembleur est du type unaire ; elles ont été notées 1, 2, 3, 4 et 7 dans le tableau précédent. Nous les traiterons, dans un premier temps, au cas par cas, ce qui devrait nous conduire ultérieurement à des conclusions plus générales. Nous porterons une attention particulière aux deux premiers cas qui, comme nous le verrons, serviront de base pour l'analyse des cas suivants.

Cas 1

Dans le premier cas de figure, l'expression (de type (1)) possède deux assembleurs unaires. Nous signalerons en particulier, dans ce cas, deux types de substitutions susceptibles d'engendrer une diminution du niveau de l'expression initiale.

Le premier type est envisagé lorsque l'assembleur substituant est relatif à l'opération inverse de l'autre assembleur figurant dans l'expression. Compte tenu des assembleurs unaires retenus dans cette étude, ceci concerne uniquement les assembleurs relatifs à l'extraction de la racine et à l'élévation du carré. Ainsi, si l'on choisit de prendre en compte les interprétations sémantiques des expressions après avoir effectué la substitution et si l'on choisit de développer les calculs en jeu[17], une

[15] Dans ce qui suit, c'est bien souvent en termes de *types* que nous ferons référence aux expressions répertoriées. Nous dirons alors, par exemple : « l'expression de type 1 », « de type 2 », etc.

[16] Nous rappelons les assembleurs unaires considérés dans cette étude : ce sont ceux relatifs à l'extraction de la racine, à l'élévation du carré et cube, et à l'affectation de l'opposé. Comme dans les analyses précédentes, nous ne traiterons pas ici des problèmes liés aux domaines de définition des fonctions.

[17] Nous rappelons que notre étude est guidée par une application éventuelle dans un environnement informatique. La question de ce qu'on appelle ici interprétation sémantique des expressions (*i.e.* le développement d'un calcul), déjà soulignée lors de l'analyse de certaines substitutions appliquées aux formes des expressions, constitue un questionnement fondamental lorsque l'on envisage la génération automatique des expressions. Une question également primordiale, qui se pose d'ailleurs dans toutes les substitutions, qu'elles soient appliquées aux formes ou aux assembleurs, consiste à déterminer dès le départ l'ensemble des nombres dans lequel on travaille. Si l'on décide de travailler sur l'ensemble des entiers naturels, dans le type de substitutions ici envisagées, une attention particulière devra être portée aux « feuilles numériques » lorsque l'on remplace un assembleur unaire par celui relatif à l'élévation du carré. Ainsi, par exemple, si on substitue la racine carré dans l'expression « $\sqrt{3}$ » par le carré, l'expression initialement de niveau un est désormais de niveau zéro : « 9 ».

expression initiale telle « -√a », à laquelle on remplace l'assembleur relatif à l'opposé par celui relatif à l'élévation au carré, devient désormais « $(\sqrt{a})^2$ », et donc « a » ; ce qui était initialement de niveau deux devient désormais de niveau zéro. D'un autre côté, si l'on choisit de ne pas développer les calculs exécutables dans l'expression, la diminution de niveau n'a évidemment pas lieu. Nous noterons, dans ce cas que la traduction rhétorique de la nouvelle expression se trouve automatiquement modifiée: ce qui était auparavant traduit comme « l'opposé de la racine carrée de a », est désormais « le carré de la racine carrée de a ».

Le second type de substitutions susceptibles d'entraîner une diminution du niveau de l'expression initiale est celui où l'assembleur substituant coïncide avec l'assembleur qui lui est directement rattaché. En d'autres termes, étant donné les expressions considérées dans ce paragraphe (« de type 1 » - cf. tableau précédent), nous pouvons dire que la diminution de niveau pourra se produire lorsque l'assembleur substituant coïncidera avec l'autre assembleur figurant dans l'expression. Prenons quelques exemples. Supposons l'expression initiale, mentionnée *supra* : « -√a ». Remplaçons, au lieu de la racine carrée, l'assembleur relatif à l'affectation de l'opposé. L'expression ainsi obtenue sera « --a ». Pour qu'elle soit bien formée, il faudra alors faire intervenir les délimitants ; elle deviendra donc, après la substitution supra évoquée, « -(-a) ». Or ici encore une décision doit être prise. Si l'on choisit de développer l'expression, la substitution initiale, de niveau deux, devient désormais de niveau zéro : « a ». Ainsi, si l'on souhaite considérer, dans ce type de tâche, uniquement des expressions de niveau deux, ce type de substitution ne peut être envisagée, dès lors que les opérations sont effectuées. En revanche, si les opérations exécutables dans l'expression ne sont pas développées, nous noterons que la substitution ne pose pas de contraintes à la traduction en termes rhétoriques : ce qui avant était énoncé comme : « l'opposé de la racine carrée de a », est désormais traduit en termes d' « opposé de l'opposé de a ».

Observons que la décision prise quant à l'exécution des opérations semble intimement liée au type de tâche envisagé. En effet, tandis que la traduction, en termes rhétoriques, de l'expression « -√a » n'est pas, à nos yeux, dépourvue de tout intérêt (pour des élèves de collège, par exemple[18]), celle de « -(-a) » nous semble nettement moins pertinente. Nous dirons alors que c'est moins la diminution de niveau possiblement engendrée par ce type de substitution que la pertinence de la tâche proposée qui guidera notre choix.

Cas 2

Pour les expressions de type 2, les problèmes soulevés dans ce qui précède ne se posent pas, étant donné que les deux assembleurs qui figurent dans ces expressions ne sont pas du même type. De plus, puisque nous avons affaire ici à des substitutions du type unaire-unaire, notre regard portera uniquement sur l'assembleur de niveau un.

[18] Certains manuels scolaires proposent en effet des tâches similaires, comme nous l'avions déjà noté.

Dans ce qui suit, nous considérerons essentiellement l'éventuelle diminution de niveau de l'expression initiale que pourraient engendrer les substitutions ici envisagées, étant donné que ceci s'est avéré un facteur déterminant dans la complexité du type de tâche proposé.

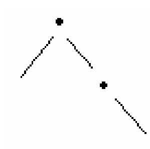
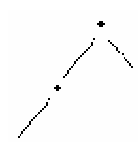
Il nous semble naturel, pour amorcer cette analyse, de procéder en analogie avec l'étude ailleurs exposée, relative aux substitutions appliquées aux formes des expressions. Nous avons en effet vu, à travers quelques exemples, que la diminution du niveau d'une expression peut avoir lieu lorsque la feuille associée à un assembleur est l'unité ou l'élément absorbant de celui-ci. Tel était le cas, par exemple, de la multiplication, lorsqu'une des places ouvertes par le signe relatif à cette opération était occupée par le nombre 1. La question que nous nous posons désormais est de savoir si et quand un tel cas pourrait se produire, dès lors que nous appliquons une substitution à l'assembleur unaire de l'expression. Or, compte tenu du type de l'expression, il est facile de voir qu'aucune modification de l'assembleur de niveau 1 n'engendrera une diminution de niveau de façon analogue. En effet, pour que ce soit possible, il faudrait, pour faire court, que la substitution d'un assembleur unaire par un autre unaire implique l'obtention du nombre 1 ou 0. Or, nous dirons, par abus de langage, que ne devient 1 et 0, à travers une telle substitution, que ce qui était auparavant 1 ou 0. Mais si tel était le cas, la diminution de niveau aurait déjà eu lieu…

Si nous avons écarté un type de problème susceptible d'entraîner la diminution du niveau de l'expression considérée, nous n'avons pas écarté la possibilité de rencontrer des situations qui engendreraient cette diminution. A nouveau, nous ne prétendrons pas aborder la question de façon exhaustive ; nous nous contenterons de fournir un exemple.

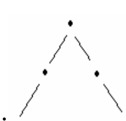
Le cas particulier que nous allons ici traiter est similaire à un problème rencontré lors de l'examen du cas 1 : celui de la juxtaposition de certains assembleurs. Plus précisément, il s'agit de la juxtaposition des assembleurs relatifs à la somme et à l'opposé. Prenons un exemple, et considérons l'expression : « 2+√a ». En appliquant une substitution du type unaire-unaire à l'assembleur de niveau un, en transformant la racine carrée en opposé, ceci nous conduit à l'expression, après application des délimitants : « 2+(-a) ». Si on choisit de laisser l'expression telle quelle, sans développement des calculs, nous dirons que la substitution, dans ce cas, de la racine carrée par l'opposé, n'entraîne pas de problèmes au niveau de la traduction rhétorique de l'expression : ce qui auparavant se décrivait en termes de « somme de deux et de la racine carrée de a » devient désormais la «somme de deux et de l'opposé de a ». En revanche, si on décide d'effectuer les calculs exécutables de l'expression, l'expression initiale de niveau deux devient désormais une expression de niveau un ; le signe «- » de l'assembleur substituant, auparavant unaire et relatif à l'affectation de l'opposé, acquiert, dans l'expression finale, le statut d'assembleur binaire et relatif à la différence.

Nous souhaitons finalement fournir un dernier commentaire à propos de cet exemple. Nous avons tenté, dans les analyses qui précèdent, bien qu'elles reposent très souvent sur des cas particuliers, de dégager leur généralité. Nous nous garderons cependant de résumer en termes généraux le cas que nous venons de traiter, comme suit : « lorsque l'assembleur de niveau deux est relatif à la somme et lorsque l'assembleur substituant de niveau un est relatif à l'opposé, la substitution entraîne une diminution de niveau ». En effet, non seulement cette diminution de niveau dépend du choix quant aux développement des opérations de l'expression, mais elle dépend également du « type » de l'expression initiale considérée, ceci allant bien au-delà de la structure combinatoire de celle-ci. En d'autres mots, admettons que l'on choisisse d'effectuer les opérations (c'est-à-dire de transformer ce qui était une somme d'un opposé en une différence). Il ne suffit pas que l'expression initiale soit du type 2 et que les assembleurs de niveau deux et un soient, après substitution, relatifs à la somme et à l'opposé, respectivement. Il s'agit ici de prendre en compte une caractéristique absente dans nos analyses précédentes : la commutativité de l'assembleur binaire. Car si modifier l'expression « $2+\sqrt{a}$ » peut entraîner une baisse de niveau dans les conditions énoncées *supra*, ceci ne se produira pas si l'on considère le symétrique de la même expression : « $\sqrt{a}+2$ » ; la situation n'étant pas symétrique quant aux substitutions en dépit de la commutativité de l'assembleur.

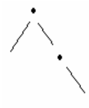
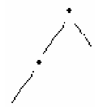
Ainsi, pour certains problèmes, l'analyse de l'arborescence combinatoire de l'expression, examinée telle quelle, ne sera pas suffisante pour nous guider dans l'étude des implications possibles des substitutions : il nous faudra bien souvent également attribuer un « sens de lecture » à l'arbre[19]. Dans le cas mentionné *supra*, par exemple, nous pouvons dire que l'expression du type 2 se dédouble en deux cas, que nous représentons par les schémas suivants :

 et 

Cas 3

Considérons à présent les substitutions dites « unaire-unaire » appliquées aux expressions de « type 3 ». Celles-ci sont constituées de deux assembleurs unaires (de niveau un) rattachés à l'assembleur binaire de niveau supérieur. Compte tenu de cette structure, les cas particuliers à envisager pour l'analyse des expressions de type 3 seront les mêmes que ceux abordés lors de l'examen des expressions de type 2. En effet, puisque l'étude que nous nous proposons de mener dans cette section porte sur quelques implications de substitutions effectuées aux assembleurs des expressions, et puisque les modifications envisagées sont traitées individuellement, les questionnements relatifs aux expressions de type 3, représentées par l'arbre :  pourront être

19 Si on considère le caractère commutatif des assembleurs binaires, ceci nous conduit à la représentation schématique de 23 types d'expression, déterminés à partir des 7 cas envisagés dans le tableau précédent.

abordés à travers les questionnements relatifs aux expressions de type 2, qu'elles soient décrites par ce schéma :  ou par son symétrique :  .

Mais si l'entrée de l'analyse peut être faite à travers ces deux cas, les conclusions qui s'en dégagent ne sont pas les mêmes. Nous soulignerons en particulier le fait que le problème de la diminution de niveau de l'expression initiale ne se produira pas pour les expressions de type 3, étant donné, d'une part, que celles-ci sont composées de deux assembleurs unaires de niveau un, d'autre part, que nous ne considérons qu'une seule substitution à la fois.

Cas 4

Ce type d'expression est sans doute le plus simple à traiter dans l'analyse des substitutions du type unaire-unaire. Etant donné que la modification envisagée porte sur l'assembleur de niveau deux, et compte tenu des assembleurs privilégiés dans la présente étude (relatifs à l'opposé, à la racine carrée et aux puissances de degré 2 et 3), il nous semble que nous rencontrerons peu de problèmes lors d'une substitution systématique de l'assembleur unaire par un autre assembleur unaire. En particulier, puisque l'assembleur sur lequel portera la substitution est de niveau deux, la question de la diminution de niveau aura peu de chance de se poser, à moins de développer les opérations exécutables dans l'expression finale.

Cas 7

Le dernier cas qui nous reste à analyser est celui où les expressions en jeu sont constituées d'un assembleur de niveau deux, binaire, auquel sont rattachés deux assembleurs de niveau un -l'un binaire et l'autre unaire. Ainsi, suivant un raisonnement similaire à celui exposé dans le cas 3, nous pouvons dire que nous rencontrerons également ici les questionnements déjà évoqués lors de l'analyse des expressions de type 2. Cependant, à l'instar des expressions de type 3, les substitutions du type unaire-unaire qui entraîneraient une éventuelle diminution de niveau, ne se posent pas ici. Ainsi, par exemple, tandis qu'une substitution, où la racine carrée est remplacée par l'opposé, pouvait conduire, pour l'expression de type 2 « a+√b », une baisse de niveau (elle était désormais modifiée en l'expression « a-b »), celle-ci, appliquée à une expression de type 7 (comme par exemple « $\frac{a}{2}+\sqrt{b}$ ») n'entraîne pas une diminution de niveau.

Conclusions

Nous souhaitons, afin de faciliter la synthèse des analyses exposées jusqu'ici, proposer quelques commentaires concernant les différentes implications que l'analyse des substitutions du type unaire-unaire, exposée précédemment, a suscitées.

A la lecture des différents cas analysés, nous observons que notre regard s'est essentiellement porté sur un seul type d'implication engendré par la substitution unaire-unaire : celui de l'éventuelle diminution du niveau de l'expression. Ce problème est, en effet, central dans l'étude des substitutions, qu'elles soient appliquées aux formes ou aux assembleurs qui figurent dans l'expression.[20] Or ceci ne constitue pas la seule raison pour laquelle ce type d'implication est passé au premier rang de notre analyse. En effet, après un rapide examen des assembleurs considérés dans notre étude, il nous est apparu que les substitutions du type unaire-unaire ont peu d'incidences sur la traduction rhétorique des expressions. Remplacer le « carré » par l'«opposé » ou encore par la « racine carrée », dans une phrase où un de ces assembleurs figurait déjà, ne nous semble pas source de problèmes.

Ainsi avons-nous donc été emmenés à considérer les différents cas où une diminution de niveau pouvait avoir lieu. A ce propos, une question souvent apparue a été celle relative au développement de calculs dits exécutables, une conséquence de ce que nous avons souvent dénommé « interprétation sémantique » de l'expression. Cette question fait partie, de fait, d'un ensemble de questionnements qu'il nous semble important de traiter lors de la mise en place éventuelle de ce type de tâche dans un environnement informatique. Il s'agira en effet de « décider », à un moment donné, du niveau d' « interprétation » octroyé au programme informatique, dès lors qu'une substitution est effectuée. Par ailleurs, comme nous l'avions déjà noté, le critère de décision sera en partie lié au niveau scolaire des élèves auquel l'exercice est théoriquement destiné. Ainsi, si certaines substitutions conservent une certaine pertinence dans la traduction rhétorique des expressions et n'impliquent donc pas un développement dans le calcul, d'autres s'avèrent moins pertinentes (comme par exemple la traduction de « -(-a) »), et seraient donc à éviter. Finalement, nous avons vu que, dans la plupart des cas, lorsque l'on choisit de ne pas développer les expressions après avoir effectué une substitution de type unaire-unaire (et donc lorsque l'on écarte tout problème de diminution de niveau), la traduction en termes rhétoriques semble ne pas poser problème.

Nous avons finalement vu que l'analyse de certains cas renvoie à l'examen d'expressions que nous dirons « fondamentales », telles les expressions de type 2 pour l'analyse des expressions de type 3 et 7. Plus généralement encore, nous avons vu que les expressions de type 2 sont fondamentales pour l'analyse des substitutions de type unaire-unaire lorsque l'assembleur unaire est de niveau un tandis que celui de niveau deux est binaire. Nous pouvons regrouper ainsi, par type d'expressions, les différents cas traités, selon le niveau des assembleurs considérés :

[20] Puisque le niveau des expressions s'est révélé déterminant de la complexité du type de tâche considéré ici.

Assembleur unaire		
Niveau 2	**Niveau 1**	
	Assembleur de niveau 2 binaire	Assembleur de niveau 2 unaire
Cas 1 et 4	Cas 2, 3 et 7 (2 = fondamental)	4

L'analyse présentée ici nous a permis de soulever des questions qui nous semblaient fondamentales pour engager notre travail. Et, bien que nous étant limités, dans cet exposé, aux seules substitutions de type unaire-unaire, l'examen des exemples traités semble pouvoir illustrer quelques questionnements (et méthodes) applicables à l'analyse des substitutions binaire-binaire. Dans la section suivante, après avoir regroupé les principales idées que cette analyse nous a permis de dégager, nous présenterons quelques pistes de recherches vers lesquelles ce travail semble converger.

VI.3 – Conclusions et perspectives

Rappelons le questionnement central qui a guidé les analyses exposées précédemment : l'étude des variations qui peuvent être envisagées aux expressions algébriques de niveau deux intervenant dans le type de tâche « associer à une expression algébrique son équivalente en français ».

Nous avons vu, dans ce qui précède, que les implications de telles modifications, qu'elles proviennent de substitutions appliquées aux formes ou aux assembleurs des expressions, peuvent être, essentiellement, de trois sortes : ce sont celles affectant la traduction rhétorique des expressions, le niveau de celles-ci et la nature de quelques assembleurs présents dans les expressions. Or ces différentes incidences ne sont pas, nous l'avons vu, des conséquences immédiates de substitutions appliquées dans le registre combinatoire. En effet, tout au long de notre analyse, le caractère didactique du contexte dans lequel notre examen était mené s'est révélé essentiel. C'est précisément la question de la pertinence didactique de certaines expressions, à l'origine de ce que nous avons dénommé « contagion sémantique » dans un examen initialement motivé sur le plan combinatoire, qui nous a conduit à considérer les différentes implications citées *supra*.

Le tableau ci-après en regroupe quelques exemples, relatifs aux substitutions affectant les formes des expressions :

Incidences / *Substitutions*	**Niveau de l'expression**	**Expression rhétorique**	**Nature d'un assembleur**
Substitution lettre-lettre		double occurrence d'une lettre[21]	
Substitution nombre-nombre	substitution de « 1 » ou « 0 » dans une multiplication	substitution de « 2 » ou « 3 » dans une multiplication	substitution de « 0 » à l'amont de la soustraction
	substitution de « 1 » au dénominateur	substitution de « 1 » au numérateur	
	substitution de « 0 » au numérateur		
	substitution de « 0 » dans une somme	substitution de « 2 » ou « 3 » au dénominateur	

L'analyse de quelques substitutions appliquées aux assembleurs de l'expression a également soulevé la question de la « contagion sémantique » dans l'analyse, dans un registre différent, toutefois : celui du développement du calcul des expressions. Ainsi avons-nous vu, par exemple, que, si au signe relatif à l'extraction de la racine carré dans l'expression « -√a » vient se substituer le signe d'opposé, l'expression finale perd de sa pertinence didactique. En effet, si demander à un élève de traduire rhétoriquement l'expression « -√a » peut nous donner des indices quant à son rapport au symbolisme (comme nous l'avons vu dans l'expérimentation développée dans le chapitre V), la traduction de « -(-a)» perd tout intérêt. Pour contourner le problème, soit l'on choisit de développer l'expression après substitution –mais alors pourquoi privilégier certaines expressions plutôt que d'autres ? la recherche de l'exhaustivité nous paraît ici trop coûteuse- soit l'on interdit certaines substitutions, comme dans l'exemple choisi.

Enfin, nous pouvons dire que notre analyse nous a conduit à expliciter des familles de substitutions dites « interdites », un point important dans l'étude de la génération automatique d'expressions.

Bien qu'étant encore à ses débuts, l'analyse que nous avons menée nous a permis, nous l'avons vu, d'apporter quelques éléments de réponses aux interrogations posées initialement, formulées en ces termes : quelles sont les « variables » des expressions algébriques sur lesquelles nous pouvons jouer de façon à garder une certaine pertinence à la tâche proposée et dans quelle mesure les variations apportées sur certains éléments d'une expression algébrique influent-elles sur la complexité de celle-ci ? Nous avons également pu aborder la problématique plus générale énoncée de la façon

[21] Dans le cas où les places ouvertes par l'assembleur binaire sont remplies par deux lettres.

suivante : quelles sont les limites des instantiations de certains types de tâches proposés et dans quelle mesure peut-on, à partir d'un modèle donné, en générer d'autres ?

La question de la génération automatique d’expressions s’inscrit de fait dans une problématique plus large, objet du projet *Lingot* : celle de la génération de familles de tâches. Nous pouvons donc dire que notre étude porte sur un volet spécifique de ce questionnement : la génération automatique d’une tâche (axée sur la génération automatique d’expressions) pour laquelle il s’agit de traduire, en termes rhétoriques, une expression algébrique donnée.

Or cette tâche est un élément seulement d’un ensemble de types de tâches où peuvent s’articuler expressions algébriques et leur traduction en langage naturel. C’est en cela que les EIAH révèlent, à notre avis, un intérêt majeur : en prenant en compte la question de l’interactivité (notamment la rétroaction de l’environnement), les outils informatiques disponibles pour la création de différents scénarios possibles[22] et l’articulation possible avec d’autres tâches, cet environnement se présente incontestablement comme porteur de perspectives encourageantes pour l’étude du rapport des élèves au symbolisme. Ainsi nous semble-t-il intéressant de poursuivre notre étude en prenant désormais en compte cet environnement : non seulement il serait intéressant d’approfondir notre analyse de la génération automatique d’expressions (de niveau deux et trois), en prenant cette fois-ci en compte les réponses possibles d’élèves, mais également d’envisager l’exploitation de différents « habillages » pour ce type de la tâche ainsi que pour certains autres. L’étude de l’articulation de ces différentes tâches au sein d’un même logiciel, compte tenu du profil de l’élève devrait finalement être envisagée.

[22] Cf. en annexe le scénario *Portrait-Robot* développé par Valérie Larue.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

René Magritte, *La condition humaine I*, 1933

A propos de son tableau *La condition humaine I*, Magritte écrit :

> "I placed in front of a window, seen from a room, a painting representing exactly that part of the landscape which was hidden from view by the painting. Therefore, the tree represented in the painting hid from view the tree situated behind it, outside the room". [Gablik, 1976, p.97]

C'est en nous inspirant de l'œuvre et du discours de cet éminent artiste surréaliste, reconnu pour l'illusion sémantique que ses toiles provoquent, que nous reprendrons le questionnement central de notre travail, après en avoir tracé, en quelques lignes, la genèse.

A l'origine de notre problématique se trouve un constat, argumenté par les recherches que nous avons menées dans le cadre du DEA de didactique des mathématiques : celui de la fragilité du rapport à la factorisation des élèves en fin de Troisième. Conformément aux hypothèses formulées dans certains travaux de didactique de l'algèbre[1], la factorisation, qui se constitue essentiellement de manipulations formelles et qui occupe une place non négligeable dans l'enseignement des mathématiques à ce niveau scolaire, s'est avérée, au vu de notre étude, très souvent dépourvue de toute signification, *lato sensu*, pour un bon nombre d'élèves. Pour la plupart, en effet, cette notion reste bien souvent associée à une tâche qu'ils accomplissent « à l'aveugle », où interviennent un certain nombre de règles « inquestionnables » vouées à transformer un ensemble d'écritures algébriques qui restent exemptes de sens.

Ainsi avons-nous été amenés, face à un tel bilan, à nous interroger sur le rapport des élèves aux expressions algébriques. Comment les élèves perçoivent-ils les expressions algébriques qu'ils manipulent ? Plus exactement, comment les élèves perçoivent-ils les éléments constitutifs de telles expressions ? En somme, et pour revenir à l'œuvre de Magritte, *que se cache-t-il, pour l'élève, derrière le symbole* ?

[1] Cf. Tonnelle (1979).

La question de la constitution du sens des écritures algébriques a déjà fait l'objet de nombreuses études en didactique des mathématiques, les travaux de Luis Radford en fournissant un exemple particulièrement éclairant[2].

C'est à travers une approche sémiotique, où l'accent est mis sur la dimension socio-culturelle du symbole[3], que Radford étudie le rapport des élèves au symbolisme. Il s'intéresse notamment à créer des situations qui inciteraient les élèves à développer eux-mêmes, en reprenant ses termes, les *idées* que véhiculent les symboles, procédant ainsi à une construction personnelle de la relation symbole/idée.

Pour ce faire, il convient, selon lui,

> « (...) d'identifier les idées de base de l'algèbre, les voies d'accès qui permettent aux élèves de construire des représentations externes de plus en plus complexes, les actions permettant de déboucher sur une dialectique entre les idées et leurs symboles. » [Radford, 1996, p.255]

Et c'est dans l'histoire, et plus précisément dans l'analyse de documents historiques qui manifestent l'émergence du langage algébrique, que Radford recherche des voies d'accès pour élaborer des séquences d'enseignement appropriées.

Le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre n'est pas le seul fait d'un chercheur comme Radford. Au fil de notre étude, nous avons montré que l'histoire a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine, qu'ils s'inscrivent dans une problématique directement liée au symbolisme algébrique ou, au contraire, dans un questionnement plus large à propos de l'enseignement/apprentissage de l'algèbre.

C'est notamment le cas des travaux de Carolyn Kieran[4], qui se sert de l'histoire afin de bâtir une analogie entre l'évolution au cours de l'histoire et au cours de l'apprentissage de quelques concepts algébriques. Sans toutefois vouloir faire de celle-là le modèle de celui-ci, elle perçoit dans cette approche historique un double intérêt : non seulement elle lui permet d'approfondir son analyse de la construction par les élèves de concepts donnés (fonction, variable, etc.), mais elle sert également à identifier les différents modes de raisonnement (arithmétique ou algébrique) susceptibles d'être mis en oeuvre lors de la résolution de problèmes posés aux élèves.

Les recherches d'Anna Sfard offrent également une coloration historique. Cependant, contrairement à Kieran, l'usage qu'elle en fait est moins spécifique à un domaine mathématique donné. En effet, c'est en s'appuyant sur des données historiques qu'elle identifie, dans un premier temps, les deux dimensions : opérationnelle et structurale, constitutives, selon elle, des notions mathématiques. Les différentes étapes organisatrices de l'édification de celles-ci que l'histoire lui permet de repérer en termes d'opération-objet lui servent ensuite à modéliser les différentes strates constitutives de la construction par les élèves de concepts mathématiques en général.

[2] Cf. Radford (1992, 1996, 1999, 2002).
[3] Surtout en ce qui concerne les travaux les plus récents de Radford.
[4] Cf. Kieran (1981, 1996).

L'histoire peut également, comme nous l'avons montré, présenter un intérêt méthodologique. Harper, par exemple, s'intéresse à repérer les similitudes et les différences entre l'ordre d'acquisition de concepts algébriques par les élèves et l'évolution historique de ces mêmes concepts. C'est en reprenant le découpage de l'algèbre proposé par Nesselmann, selon lequel l'évolution historique de l'algèbre se présenterait selon un schéma ternaire (rhétorique-syncopée-symbolique), qu'elle décrit les modes de résolution employés par certains élèves face à un problème donné. Ainsi repérera-t-elle, par exemple, les réponses qui relèvent de méthodes qu'elle classifie en tant que « rhétoriques », « diophantiennes », ou « vietiennes ».

Cet intérêt méthodologique de l'histoire est également une caractéristique des travaux de Radford qui, nous l'avons vu, s'en sert notamment pour construire des séquences d'enseignement. Cependant, l'usage qu'il en fait paraît organisé autour d'une analyse qui déborde le cadre d'une étude purement historique. Lorsqu'il affirme : « (…) un symbole ("*x*" ou autre) est le symbole de quelque chose, d'une idée », cela semble indiquer que son regard ne porte pas uniquement sur les différentes marques historiques de l'édification d'un symbole, mais qu'il s'intéresse, au-delà, à ce que nous appellerons ici, de façon intuitive, l' « essence » d'un symbole ou, autrement dit, à *ce qui se cache derrière un symbole*.

Cet élargissement du questionnement développé par Radford n'est certes pas propre à ses travaux, cependant il nous semble lié à l'objet même de son questionnement. En effet, notre étude a révélé que, plus les travaux portaient sur les symboles mathématiques en soi, plus les analyses prenaient source dans des domaines autres que l'histoire, et en particulier dans la philosophie.

En analysant différentes études se rapprochant de notre thème, *i.e.* le symbolisme algébrique, nous avons en effet constaté que bon nombre de recherches, didactiques ou cognitives[5], renvoient à des textes philosophiques de Gottlob Frege, rassemblés dans l'ouvrage *Ecrits logiques et philosophiques*, et plus précisément aux notions de *sens* et *dénotation* qu'il introduit. Cependant, l'interprétation et l'emploi de ces deux notions présentent des variations selon les auteurs, qui en ont parfois adapté la définition à leurs besoins. Si certains, comme Raymond Duval ou Jean-Philippe Drouhard, se sont montrés fidèles aux termes frégéens (le second rajoutant toutefois les notions de *connotation* et d'*interprétation*), d'autres s'en sont éloignés, comme le montrent les travaux de Ferdinando Arzarello qui, d'une part, dédouble la notion de sens d'une expression algébrique pour définir ce qu'il nomme *sens algébrique* et *sens contextualisé* d'une expression et, d'autre part, « contextualise » la notion de dénotation.

La prégnance des références philosophiques dans ces travaux didactiques sur le symbolisme a contribué à éveiller en nous un changement de perspective. Ils ont en effet montré que, pour aborder la question du rapport des élèves au symbolisme algébrique, une investigation théorique préalable sur celui-ci était fondamentale. Ainsi nous est-il paru primordial de compléter l'analyse développée par les auteurs mentionnés *supra*, relative aux termes frégéens de *sens* et *dénotation*, par une mise en perspective de différents écrits philosophiques apparus comme des références incontournables dans l'étude de l'algèbre.

La lecture des textes choisis s'est essentiellement articulée autour de deux pôles, selon que les réflexions développées par les auteurs autour de l'algèbre étaient d'ordre général ou, au contraire, spécifiques aux symboles de celle-ci.

C'est ainsi que nous avons regroupé, dans une première partie, les textes de Jules Vuillemin (1962) et Gilles Gaston Granger (1994), en retenant de ceux-ci une authentique analyse des éléments constitutifs de l'algèbre et de leurs articulations avec la philosophie. Les réflexions menées par les deux auteurs nous ont cependant paru clairement distinctes. Tandis que le premier se réfère au domaine algébrique, essentiellement dans le but d'établir des rapports entre les mathématiques et la philosophie, en insistant sur l'étude des méthodes qui lui sont spécifiques, à partir d'une analyse des processus employés par divers mathématiciens, nous retrouvons dans l'ouvrage de G-G Granger un discours davantage bâti autour de la question de la *pensée formelle* et plus précisément sur les corrélations entre les couples forme/contenu et opération/objet.

Le deuxième pôle s'est organisé autour des écrits de Désiré André (1909), Charles Babbage (1821), Marcelo Dascal (1978), et enfin de Florian Cajori (1928) dont le texte, bien que ne relevant pas d'une analyse philosophique, s'avère une référence incontournable pour toute étude relative aux symboles mathématiques. Les textes qui constituent ce second versant, plus directement lié au symbolisme algébrique ont, à nouveau, été distingués, en fonction -cette fois-ci- de la nature des réflexions qui nous ont paru y être menées. Ainsi avons-nous corrélé les ouvrages de Cajori et André qui sont, dans des registres entièrement différents cependant, totalement dédiés aux notations mathématiques, le premier fournissant un inventaire minutieux des signes et le second un ensemble de règles guidant le « bon usage » de celles-ci. Tous deux excluent, nous l'avons vu, malgré leur intérêt, toute ouverture vers une analyse philosophique ou épistémologique ; c'est en cela que nous les avons distingué des écrits de Babbage et de Dascal, dans lesquels il est aisé d'identifier une telle analyse philosophique.

L'exposé des éléments rencontrés dans ces différents écrits ne pouvait se faire sans pointer un certain nombre de résonances didactiques. C'est ainsi que nous avons pointé dans le champ didactique des catégories de pensée qui, par l'accent mis sur oppositions et dualités, par exemple, nous rapprochent du champ philosophique[6]. De la même façon, nous avons noté que si certains écrits philosophiques rencontrés soulignent la puissance du calcul aveugle en algèbre et l'intérêt d'établir des notations détachées du contexte et seulement porteuses de ce qui permet de les rendre opératoires, ces mêmes caractéristiques sont également l'objet d'attention dans bon nombre d'études didactiques. L'écho des réflexions philosophiques dans le champ didactique doit cependant, nous l'avons vu, être

[5] Cf. Duval (1995).

[6] Tel est le cas, nous l'avons vu, des couples outil/objet, processus/objet ou ostensif/non ostensif rencontrés dans la littérature didactique.

manié avec précaution. Car si des ponts peuvent être établis entre les deux domaines à propos de certains de leurs questionnements, nous mesurons sans difficulté les différences qui séparent les deux champs de réflexion. Les oppositions et dualités développées dans les deux domaines, par exemple, ne sont, comme nous l'avons montré, à l'évidence pas travaillées de façon semblable, ne servent pas les mêmes desseins. Tandis que, dans les textes philosophiques analysés, elles sont mises au service de l'étude des rapports entre mathématiques et philosophie ou de ce qui fait la puissance des méthodes mathématiques et des formes symboliques que cette science utilise, ces catégories ont d'abord émergé dans le travail didactique comme des moyens d'approcher et comprendre certaines difficultés persistantes rencontrées par les élèves dans leurs apprentissages mathématiques, ainsi que de pointer certains dysfonctionnements des systèmes d'enseignement qui freinent ou font obstacle aux apprentissages visés. Ainsi avons-nous donc souligné qu'il nous semblait vain de vouloir forcer trop loin la recherche d'analogies.

Mais si la lecture de ces différents écrits philosophiques a, conformément à notre dessein, incontestablement approfondi l'analyse théorique relative à l'algèbre et à ses constituants amorcée par l'étude des textes de Frege, ces écrits se sont révélés cependant insuffisants pour nourrir épistémologiquement notre étude didactique du rapport au symbolisme algébrique, en particulier parce que le discours constituant la plupart des travaux épistémologiques précités relevait plutôt d'une réflexion philosophique d'ordre général que d'une pensée épistémologique spécifique de l'écriture symbolique.

Si l'on voulait étudier les symboles algébriques et le rapport au symbolisme en s'appuyant sur les expériences à partir desquelles ils s'édifient[7], il nous semblait primordial que l'étude théorique susceptible de charpenter notre recherche fut sous-tendue par un examen de la genèse existentielle des symboles, ceux-ci étant perçus en tant qu'éléments actifs de l'édification des mathématiques. C'est pourquoi, pour approfondir notre réflexion épistémologique, nous nous sommes intéressés aux travaux de Michel Serfati, lequel fait référence à certaines questions épistémologiques soulevées par les auteurs cités *supra*, tout en proposant une réflexion rétrospective, sans précédent, d'un mathématicien, relative à la mise en place de l'écriture algébrique.

Notre problématique s'est ainsi trouvée naturellement évoluer au fil de la recherche, d'une étude du rapport des élèves au symbolisme algébrique à l'articulation des réflexions didactiques et épistémologiques relativement au symbolisme.

Nous avons alors procédé, dans un premier temps, à une relecture épistémologique des travaux didactiques menés dans le domaine du symbolisme, en nous servant du découpage des figures de la représentation[8] proposé par M. Serfati comme grille d'analyse. Cette examen, qui a consisté à mettre

[7] La dimension historique, comme nous l'ont montré les différents travaux exposés dans le premier chapitre, s'étant révélée essentielle.

[8] En empruntant les termes de M. Serfati, ce sont : la représentation du requis, celle du donné, celle des instructions opératoires élémentaires, de l'enchevêtrement des instructions, enfin de la mise à égalité et de la représentation des concepts composés.

en regard, pour chaque figure de la représentation, les travaux didactiques associés, nous a notamment permis de déceler dans des réponses d'élèves, des modes de raisonnement similaires à ceux mis en évidence par les travaux épistémologiques. Ainsi, par exemple, avons-nous exploré, sous une perspective épistémologique, la difficulté de certains élèves à aborder la question de la représentation d'un nombre « arbitraire mais fixé » ou encore les réticences, bien repérées, de certains autres à percevoir la symétrie que véhicule la représentation de la mise à égalité.

Mais la contribution des travaux de M. Serfati à notre étude ne s'est pas limitée à cette mise en regard des deux champs de recherche. Après avoir étudié, à travers divers exemples, dans quelle mesure l'analyse épistémologique pouvait apporter des éléments nouveaux à l'étude didactique de certaines productions d'élèves, il convenait d'approfondir cette analyse, en proposant des tâches, *lato sensu*, susceptibles d'enrichir nos connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme. Pour cela, nous nous sommes détachés d'une analyse « linéaire » des différentes « figures de la représentation » pour amorcer une étude « transversale », en dégageant quelques idées repérées et décrites de façon plus ou moins explicite tout au long de l'étude de chacune de ces figures. Et, plutôt que d'envisager des exercices destinés à caractériser chaque figure, nous avons choisi d'élaborer des situations « diagonales » vouées à illustrer trois idées dégagées de l'analyse épistémologique du symbolisme algébrique. En particulier, nous nous sommes intéressés à examiner la question des deux démarches théoriques d'exploration d'une écriture symbolique (la démarche analytique –qui est celle théoriquement adoptée par l'auteur- et la démarche synthétique –qui est celle théoriquement adoptée par le lecteur), ainsi que la question de l'usage de lettres dans la résolution d'un problème mathématique et enfin celle de substitution dans la manipulation de symboles algébriques.

L'analyse épistémologique s'est avérée, à ce stade de notre recherche, fondamentalement architectonique : nous avons associé, à chaque idée épistémologique, différents « types de tâches », en mettant l'accent sur différents volets de chaque idée. Chaque type de tâche a ensuite été instancié, en jouant sur certaines variables définissant ceux-ci, à travers quelques *exercices*[9].

Dès lors, la contribution de l'analyse épistémologique a pris également forme dans la pratique. Nous nous sentions désormais bien armés pour mener un travail de nature expérimentale, guidés par notre question, que nous reformulions de la façon suivante : dans quelle mesure l'étude épistémologique permet-elle de mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme ? Nous avons donc envisagé la mise en oeuvre de certains exercices dans des classes réelles, à deux niveaux différents : les mêmes exercices ont à la fois été proposés à des élèves de $4^{ème}$, dont l'introduction au symbolisme est très récente, mais aussi à des élèves de 2^{nde}, *a priori* déjà familiers avec l'écriture symbolique.

Compte tenu de la spécificité des exercices proposés, qui ne pouvaient recouvrir tous les volets du symbolisme algébrique, l'analyse des données recueillies nous a permis de mettre à jour quelques indices quant au rapport au symbolisme des élèves concernés par l'expérimentation, sur des

[9] Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de la section V.1 pour une définition précise du terme « exercice » tel que nous l'employons dans ce manuscrit.

points très précis. En particulier, nous avons vu que, même si le passage de la position de lecteur à celle d'auteur d'une expression algébrique ne va pas sans poser problème aux élèves (les associations entre les écritures algébrique et rhétorique des expressions[10] étant néanmoins partiellement réussies), bon nombre manifestent dès les premiers temps de leur introduction au symbolisme (*i.e.* en classe de quatrième) une certaine aisance à reconnaître la « structure principale » d'une expression (somme, produit, carré, etc.). Nous avons aussi montré que l'usage spontané de lettres comme moyen de description d'une formule n'est pour eux nullement évident[11], plusieurs de leurs formulations relevant d'une description entièrement rhétorique. Finalement, nous avons souligné que si, pour la plupart des élèves de 2nde l'idée de substitution ne semble pas faire difficulté (quelques uns allant même jusqu'à entrevoir la composition de fonctions), celle de la mise en oeuvre des calculs en jeu a par contre été à l'origine de la majorité de nombreuses erreurs commises. Plus précisément, nous avons noté un rapport fragile des élèves aux parenthèses, déjà repéré dans les travaux de Brigitte Grugeon (1995), manifestant la difficulté des élèves à distinguer l'essentiel de l'accessoire dans l'usage des délimitants, un point déjà soulevé dans les analyses épistémologiques.

La richesse de l'analyse de nature épistémologique nous a ensuite permis de parfaire l'examen des diverses réponses données par les élèves, en y apportant davantage de finesse.

Ainsi, par exemple, l'idée épistémologique de la double ordination dans l'exploration d'une écriture symbolique nous a-t-elle permis, entre autres choses, d'analyser, sous le prisme des démarches analytique et synthétique, la « reconstruction » des expressions algébriques par un élève de 4ème, qu'elles soient données en français ou sous forme symbolique. L'analyse épistémologique nous a également conduit à mettre en lumière un type de description intermédiaire entre le rhétorique et le symbolique, présent dans quelques réponses d'élèves, qui tient compte non seulement de la présence de symboles dans le texte produit, mais qui considère aussi l'ordre dans lequel apparaissent les traductions des différents « assembleurs » d'une expression algébrique. Ceci nous a permis de distinguer entre des réponses d'élèves qui auraient pu être, à première vue, mises sur le même plan.

A l'issue de cette première confrontation à la contingence, se sont dégagés, de façon presque naturelle, divers prolongements. Tout d'abord nous ressentions la nécessité, évidente, de mener l'expérimentation en cours auprès d'une population plus large d'élèves, afin de nous dégager de la spécificité de notre échantillon pour tâcher de cerner des caractéristiques véritablement représentatives des niveaux scolaires étudiés. Ceci devrait nous conduire à formuler des hypothèses plus décisives quant à l'évolution du rapport des élèves au symbolisme. Ensuite, si nous souhaitions élargir notre questionnement relatif au rapport des élèves au symbolisme algébrique sans nous limiter aux quelques aspects identifiables par les exercices proposés, il nous semblait impératif que ces derniers fussent complétés par d'autres, qu'ils soient relatifs aux même types de tâches ou, au contraire, à d'autres.

[10] cf. exercice 1 présenté aux élèves.
[11] L'absence, sur ce point, d'une évolution nette entre les rédactions des élèves de 4ème et de 2nde mérite une investigation plus approfondie, ce résultat nous ayant apparu pour le moins surprenant.

Finalement, les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses données par les élèves aux différents exercices ont révélé l'importance de certaines variables didactiques dans l'élaboration de ceux-ci (notamment la complexité des expressions algébriques en jeu). Il nous semblait désormais important de procéder à une identification plus systématique des variables et d'étudier leurs effets.

C'est à partir de ce dernier questionnement que nous avons amorcé le prolongement de notre travail, non seulement entraînés par la logique « interne » de notre étude, mais également par des évènements qui lui étaient extérieurs (les objectifs spécifiques du projet *Lingot*).

L'analyse de la complexité des expressions proposées dans les différents types de tâches que nous avions mis en place nous a conduit vers un questionnement plus spécifique, relatif aux divers éléments constitutifs des expressions algébriques, mettant en rapport trois aspects qui sont apparus, au fil de notre étude, comme étant intimement liés: le type de tâche envisagé, la nature des éléments constitutifs des expressions en jeu et la complexité de celles-ci. Les questions que nous nous proposions d'aborder étaient alors les suivantes : un type de tâche étant donné, quelle(s) complexité(s) peut-on envisager pour les expressions en jeu? Quels sont les éléments qui déterminent cette complexité (niveau de l'expression, ramification de son arborescence, etc.)? De façon plus précise : quelles sont les « variables » des expressions algébriques sur lesquelles nous pouvons jouer de façon à garder une certaine pertinence à la tâche proposée et dans quelle mesure les variations apportées sur certains éléments d'une expression algébrique influent-elles sur la complexité de celle-ci ?

L'analyse approfondie de certains types de tâches et du niveau de complexité des expressions qui les composent ont en effet suscité l'intérêt de chercheurs en EIAH qui, travaillant sur la modélisation et la mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage de l'algèbre (projet *Lingot*), ont perçu dans cette analyse un point d'appui qui semblait leur permettre de générer de façon automatique un ensemble de tâches susceptibles d'être proposées à des élèves dans un environnement informatique. C'est donc ainsi que nous avons été amenés à étudier, de façon détaillée, les variations qui peuvent être envisagées à propos de certaines expressions algébriques. Dans ce contexte, la minutie même de notre examen était en fait fondamentale et notre étude se devait de se rapprocher au plus près de l'exhaustivité. Cet objectif, soulignons-le, n'a pas pu être atteint, le travail amorcé et ici présenté n'en étant qu'à ses débuts. Cependant, l'analyse que nous avons engagée nous a donné la possibilité d'entrevoir des « familles » de substitutions, en fonction de leurs implications. En effet, selon que les incidences de la génération automatique pouvaient porter sur la traduction rhétorique, le niveau des expressions ou encore sur la « nature » des assembleurs, certaines classes de substitutions ont dû être écartées[12]. En ce faisant, prenant en compte le caractère didactique

[12] Comme, par exemple, le cas de la substitution dans l'expression initiale de niveau deux « $5x+2$ », du nombre 2 par 0, à l'issue de laquelle, par « contagion sémantique », nous obtenons l'expression de niveau un dont la traduction peut être : « le produit de 5 par x ».

de cette étude[13], nous avons été conduits à considérer l'aspect « sémantique » des expressions, ce qui avait été écarté par principe dans les analyses épistémologiques relatives à la substitution.

Les quelques éléments déjà obtenus semblent finalement ouvrir des perspectives de recherches encourageantes. En effet, le domaine choisi pour amorcer le prolongement de notre travail, les EIAH, nous paraît particulièrement bien adapté pour apporter des réponses à quelques interrogations découlant du présent travail. Sur le plan théorique, tout d'abord, nous avons vu que cette application nous a conduit à raffiner la question de la complexité des expressions algébriques: guidés par le pôle didactique de notre étude, nous avons par exemple vu que le concept de « niveau » d'une expression algébrique a dû être complété par la prise en compte des ramifications de l'arborescence combinatoire de celles-ci. Dans la pratique, ensuite, nous devons souligner que l'environnement informatique permet d'envisager différents « habillages » pour les types de tâches considérés. Or, non seulement nous pouvons diversifier les scénarios pour un même type de tâche, mais aussi les organiser autour de diverses autres activités algébriques où différentes compétences des élèves peuvent être étudiées. Cette organisation devrait nous conduire à mieux cerner le rapport des élèves au symbolisme. Finalement, la mise en place de certains exercices dans l'environnement informatique[14] devrait nous permettre de travailler avec une population plus importante d'élèves, ainsi susceptible de nous apporter des résultats davantage fondés quant au rapport des élèves au symbolisme.

Compte tenu des avantages apportés par les EIAH sur les divers aspects mentionnés *supra*, il nous semble naturel que le prolongement du travail présenté dans ce manuscrit se fasse dans cette direction, notamment par la conception d'autres exercices (qu'ils soient ou non relatifs aux mêmes types de tâches que ceux envisagés ici) ou encore à travers l'étude de l'articulation de différents exercices (en prenant en compte l'interactivité de l'environnement). Finalement, nous pouvons suggérer la conception d'autres exercices, sous-tendus, cette fois-ci, par d'autres idées épistémologiques puisées dans ce que les travaux théoriques nous ont permis de découvrir.

Partant d'un questionnement purement didactique, notre recherche s'est vue progressivement caractérisée par la mise en regard de deux domaines, didactique et épistémologie –leur réunion nous étant apparue incontournable à l'édification de notre projet. Le prolongement de celui-ci semble toutefois pointer vers la mise en rapport de trois champs de recherche, la composante informatique venant s'assembler (*sumballein*) aux deux autres. Une question qui nous semble désormais naturellement émerger est la suivante : comment ces trois champs d'études, didactique, épistémologie et informatique peuvent-ils s'articuler au sein d'une même recherche ? Quelles limites et quelles perspectives se dessinent d'une telle conjonction ?

[13] Et en particulier l'idée de la pertinence de certaines expressions algébriques pour des élèves que l'application informatique nous a amené a considérer.
[14] Et en ligne.

BIBLIOGRAPHIE

Références épistémologiques

[1] André, D. (1909). *Des notations mathématiques. Enumération, choix et usages*. Paris, Gauthier Villars.

[2] Babbage, C. (1821). On the influence of Signs in Mathematical Reasoning. *Transactions of Cambridge Philosophical Society (vol.II)*, 325-375. Cambridge.

[3] Condillac, E. (1981). *La langue des calculs*. Edition critique par Sylvain Auroux et Anne-Marie Chouillet. Presses Universitaires de Lille.

[4] Dascal, M. (1978). *La sémiologie de Leibniz*. Paris. Aubier-Montaigne.

[5] Frege, G. (1971). *Ecrits Logiques et philosophiques*. Traduction de Claude Imbert. Paris. Seuil.

[6] Granger, G-G. (1994). *Formes, opérations, objets*. Vrin. Paris.

[7] Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris I.

[8] Serfati, M. (1998). Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique. *Revue d'Histoire des sciences 51*(2-3), 237-289.

[9] Serfati, M. (1999). La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russel. In M. Serfati (Ed.) *La recherche de la vérité*, 145-174. Paris. ACL Editions.

[10] Serfati, M. (2001). Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz. *Revue d'Histoire des Sciences 54(2)*, 165-221.

[11] Vuillemin, J. (1962). *La philosophie de l'Algèbre (tome I)*. Paris. Presses Universitaires de France.

Références didactiques

[12] Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics 14*(3), 24-35.

[13] Artigue, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2-3), 241-286.

[14] Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In R. Sutherland et al. (Eds.) *Perspectives on School Algebra,* 61-81. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

[15] Bardini, C. (2001). *Le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième*. Cahier Didirem 35. IREM Paris 7.

[16] Bednarz, N. and Janvier, B. (2001). Emergence and developpement of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran and L.

Lee (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, 115-136. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

[17] Behr M., Erlwanger S. and Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching 92*, 13-15.

[18] Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors. A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, Berks. NFER-Nelson.

[19] Chalouh, L. and Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12*, 33-42. Reston: NCTM.

[20] Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

[21] Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Ed.) *Actes de l'Université d'Eté de la Rochelle,* 91-119. IREM de Clermont-Ferrand.

[22] Crowley L., Tall D. and Thomas M. (1994). Algebra, Symbols and Translation of meanings. In J.P. da Ponte and J.F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematcis Education,* 240-247. Lisbonne.

[23] Didierjean G., Dupuis C., Duval R., et al. (1996-1997). A propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit x 44*, 35-48.

[24] Dorier, J.L. (1997), *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. perspective théorique sur leurs interactions*. Document d'habilitation non publié.

[25] Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.

[26] Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

[27] Duval, R. (1988). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets.*

[28] Duval, R. (1995). S*émiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern. Peter Lang.

[29] Friedlander A., and Hadas N. (1988). Teaching Absolute value Spirally. In Coxford A.F. and A.P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K-12,* 212-220. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

[30] Gray E. and Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A "proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education 25*(2), 116-140.

[31] Gray E. and Tall D. (1993). Sucess and failure in mathematics: the flexible Meaning of Symbols as process and concept. *Mathematics Teaching 142*, 6-10.

[32] Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: B.E.P. et Première G*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

[33] Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics 18*(1), 75-90.

[34] Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Education Studies in Mathematics 12*(3), 317-326.

[35] Kieran, C. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching,* 3-12. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

[36] Kuchemann, D. (1981). *Children's understanding of mathematics : 11-16*. In K. Hart (Ed.) *Algebra,* 102-119. Londres. 102-119.

[37] Radford L. and Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation 22*(2), 253-276.

[38] Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática. 11*(3), 25-53.

[39] Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics 22*(2), 14-23.

[40] Sackur C., Drouhard J.P., Maurel M. et al. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées et qu'en faire ?. *Repères IREM 28*, 37-68.

[41] Sáenz-Ludlow A. and Walgamuth C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics 35*, 153-187.

[42] Sfard A. and Linchevski L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*(2-3), 191-228.

[43] Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 1-36.

[44] Stacey K. and MacGregor M. (1994). Algebraic sums and products: students concepts and symbolism. In J.P. da Ponte and J.F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. IV),* 289-296. Lisbonne.

[45] Stacey K. and MacGregor M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.4),* 190-197. Lahti.

[46] Tall D., Thomas M. Gavis G, Gray E. & Simpson A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behaviour 18*, 223-241.

[47] Tall, D. (1994). A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. In Actes de la 46ème Rencontre Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. *Représentations graphique et symbolique de la maternelle à l'Université.* IREM de Toulouse.

[48] Tonnelle, J. (1979). *Le Monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA. IREM d'Aix-Marseille.

[49] Trigueros M. and Ursini S. (1999). Does the understanding of variable evolves through schooling?. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceeding of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *(vol.4)*, 273-280. Haifa.

[50] Trigueros M., Ursini S., Reyes A. (1996). College Students' conceptions of variable. In L. Puig and A. Gutiérrez (Eds.). *Proceeding of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.4)*, 315-322. Valencia.

Divers

[51] Alleau, R. (1996). *La science des symboles*. Paris. Payot.

[52] Caillé, A. (1998). Symbolisme ou symbolique ?. *La Revue du M.A.U.S.S 12*(2), 15-24.

[53] Cajori, F. (1928). *A History of mathematical notations* (vol. I et II). La Salle, Illinois. The Open Court Publishing Company.

[54] Gablik, S. (1976). *Magritte.* Boston. NY Graphic Society.

[55] Garcia, R. and Piaget, J. (1989). *Psychogenesis and the history of science*, N.Y. Columbia University Press.

[56] Ortigues, M.C. et E. (1984). *Oedipe africain*. Paris. L'Harmattan.

ANNEXE 1 – LES SOLUTIONS (ENVISAGEABLES) DES EXERCICES 1 ET 2 PROPOSES AUX ELEVES DE 4EME

Exercice 1

Question 1
A $\rightarrow$ 2
B $\rightarrow$ 4 : L'inverse de la somme des carrés de a et b
C $\rightarrow$ 1

Question 2
A $\rightarrow$ 2
B $\rightarrow$ 1
C $\rightarrow$ 4
D $\rightarrow$ 3

Question 3
A $\rightarrow$4 : L'inverse du produit de a et b
B $\rightarrow$4 : L'inverse de la somme des opposés de a et b
C $\rightarrow$1 ou 3

Exercice 2

a) 2x2: 1
3x2: 2
5x3 : 8

b) 11x9 : 80

c) 20x17 : 304

d) Soit x le nombre de noisettes en longueur et y le nombre de noisettes en largeur.
Le nombre de pépites que contient une tablette xxy est égale à (x-1)x(y-1)

e) Oui, la tablette 8x2

ANNEXE 2 – LES SOLUTIONS (ENVISAGEABLES) DES EXERCICES PROPOSES AUX ELEVES DE 2NDE

Exercice 1

Question 1
A → 2
B → 4 : L'inverse de la somme des carrés de a et b
C → 1

Question 2
A → 4 : L'inverse du produit de a et b
B → 4 : L'inverse de la somme des opposés de a et b
C → 1 ou 3

Exercice 2

$f(x) = x^2-x+2$

a) $f(1) = 2$; $f(4)=14$

b) $f(a)=a^2-a+2$
$f(-a)=a^2+a+2$

c) $f(2x)=4x^2-2x+2$
$f(-x)=x^2+x+2$
$f(x+1)=x^2+x+2$
$f(x^2)=x^4-x^2+2$

d) $f(x)=x^2-x+2$
$f(-x)=x^2+x+2$
$f(x) \neq f(-x)$ donc f n'est pas paire

e) $f(f(x))=x^4-2x^3+4x^2-3x+4$

Exercice 3

a) 2x2: 1
3x2: 2
5x3 : 8

b) 11x9 : 80

c) 20x17 : 304

d) Soit x le nombre de noisettes en longueur et y le nombre de noisettes en largeur.
Le nombre de pépites que contient une tablette xxy est égale à (x-1)x(y-1)

e) Oui, les tablettes 13x2, 7x3 et 5x4

ANNEXE 3 – LES REPONSES DES ELEVES DE LA CLASSE DE 4EME A LA QUESTION D/ EXERCICE N°2 (TABLETTES DE CHOCOLAT)

(1) Oui, on peut calculer le nombre de pépites car on peut remarquer que : pour une tablette de 5x3 il y a en longueur 5 et en largeur 3. Pour les pépites il y en a 4 en longueur soit une de moins que pour les noisettes et 2 pour la largeur soit 1 de moins que pour les noisettes.
Raisonnement similaire pour une tablette de 3x2.
Donc on a juste à soustraire « un » à la longueur et à la largeur et à multiplier le résultat pour trouver le nombre de pépites.

(2) Oui, car à chaque colonne de noisettes il y a une pépite en moins donc on peut connaître le nombre.

(3) Oui, car il faut juste enlever 1 à la longueur et à la largeur des noisettes. Ex : 18x20 il y aura 17x19 pépites.

(4,8,10,14,15,18,22,23,27) Ss rép.

(5) Oui car quand nous multiplions longueur et largeur ça nous donne le nombre de noisette et le nombre de pépite est à peu près la moitié du nombre de noisette.

(6) Oui, c'est possible car il suffit d'une longueur et d'une largeur pour trouver le résultat (= périmètre)

(7) Oui, car à chaque fois les noiset on une de + en largeur et en longueurs donc on peut connaître le nombre de pépite.

(9) Oui, il suffit de rajouter 1 au nombre de la longueur et au nombre de la largeur et de multiplier les deux nombres ensembles.

(11) Oui, car le nombre de pépites est toujours inférieur de 1 au nombre de noisettes. Il suffit donc de noter le nombre de pépite inférieur de 1 au nombre de noisette. Exemple : nombre de noisette 7x5
le nombre de pépites = 6x4
Il suffit juste de faire la multiplication 6x4=24 pépites

(12) b=largeur ; a=longueur
Oui. Il suffit de faire (a-1)x(b-1)

(13) Oui, il faut enlevé 1 a la largeur et à la longueur et multiplier.

(16) Oui, on peut calculer le nombre de pépites, on enlève 1 au 2 facteurs, et si on les multiplie on trouve le nombre de pépites car il y a toujours une rangé et une colonne de noisette de plus.

(17) On peut connaître le nombre de pépite en soustrayan un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble car il y a toujours une rangée de moins de pépite que de noisette et une colonne de moins.

(19) Oui, car il y a sur la longueur a compté 1 pépites de moins que de noisettes et sur la largeur aussi il suffit par ex pour une tablette de 5x3 compté pour les pépites 4x2 soit 8 pépites et cela est juste.

(20) Non, car on a besoin du nombre de noisettes pour calculer les pépites.

(21) Oui, car si l'on regarde bien les tablettes, on a mit 1 noisette entre chaque pépites.

(24) Oui

(25) Si on connait que le nombre des noisette en longueur est le nombre de noisette en largeur on a cas les multiplier.

(26) Oui si on connait que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, on peut calculer le nombre de pépites d'une plaquettes car si il y a 30x17 (noisettes) il y a 29x16 pépites de chocolats.

ANNEXE 4 – LES REPONSES DES ELEVES DE LA CLASSE DE 2NDE A LA QUESTION D/ EXERCICE N°3 (TABLETTES DE CHOCOLAT)

(1) On peut savoir le nombre de pépites car par exemple dans une tablette 6x4 = il y a 6 longueur donc 5 pépite

(2) Oui, par exemple si une tablette a 4 noisettes en longueur et 10 de largeur il suffit d'enlever 1 à 4 et 1 à 10 donc 3x9

(3) Si on connaît le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur on peut alors calculer le nombre de pépites d'une tablette tout comme l'histoire des pépites

(4) Car on enlève un à chaque. ex :
11x9 = 10x8 = 80
20x17 = 19x16 = 304 etc

(5) Oui car les pépites sont toujours installés tel que pour x nombre de noisettes il y a x-1 nombre de pépites, autant en longueur qu'en largeur, donc lorsque l'on connait x il nous suffit de lui ôter 1 et on trouve le nombre de pépites

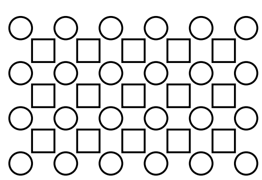
(6) Oui car les pépites sont disposés de tel manières que 3x2 pour les noisettes
2x1 pour les pépites
on retire 1 pour les longueurs et largeurs et voilà.

(7,15,16) ss rép.

(8) Oui, car on sait que 2 noisettes en longueur et 2 noisettes en largeur entoure 1 pépite donc après il suffit de multiplier

(9) Si on connait le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, en faisant le nombre de noisettes en largeur-1 (car pour chaque rangés de noisettes on enleve une pépite ex : 3 noisettes -> 2 pépites) x nombre de noisettes en longueur-1 = nombre de pépite dans une tablette.
ex : une tablette noté 6x4 = (6-1) x (4-1) = 5x3 = 15. Il y a donc 15 pépites dans cette tablette

(10) Si on connaît le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, ma solution serait d'enlever une noisette en longueur et une en largeur et de multiplier car on peut remarquer que les noisettes et les pépites sont tout le temps disposées de la même façon, qu'il y en ait peu ou beaucoup.
ex : pour une tablette noté 6x4 on fait (6-1) x (4-1) = 15. Vérification par dessin :



on obtient bien 15 pépites.

(11) Il suffit de prendre le nombre de noisettes en longueur moins une noisette pour le bord et multiplier par le nombre de noisettes en largeur moins une pour le bord.
ex : 9x7 (9-1) x (7-1) = 48
Il y a 48 pépites dans une tablette 9x7

(12) Oui, je peut car pour le nombre de noisettes en longueur j'en retire une et pareille en largeur puis je multiplie la longueur par la largeur.
ex : 5 noisettes en longueur et 3 en largeur
5-1 = 4 et 3-1 = 2

4x2 = 8 pépites de chocolat

(13) Oui, car entre 4 noisettes, il y a 1 pépite

(14) Il faut enlever 1 aux nombres de noisettes en longueur et en largeur puis les multiplier entre eux

(17) oui

(18) à chaque fois il y a un pépite en moins par rapport au noisette, que ce soit en largeur ou en longueur

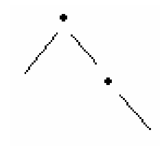
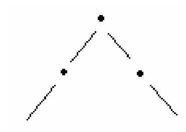
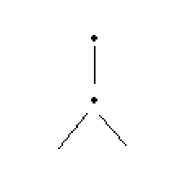
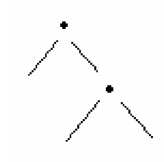
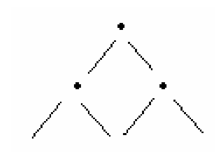
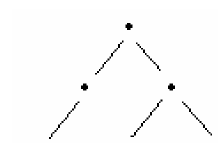
(19) ex : 10x8 = 63 pépites il suffit de retirer 1 à chaque nombre de noisette en longueur et en largeur 9x7 = 63

(20) on enlève 1 à chaque nombre. ex 11x9 = 99
10x8 = 80 Donc il y a 80 pépites pour un tableau de 11x9

(21) Il suffit juste de les compter grâce au dessin

(22) si par exemple on a une tablette de xxy pour savoir le nombre de pépites on utilise la formule (x-1)x(y-1)

ANNEXE 5 – ARBORESCENCES COMBINATOIRES D'UNE EXPRESSION DE NIVEAU DEUX

	ASSEMBLEUR DE NIVEAU 2		
ASSEMBLEUR DE NIVEAU 1	**Unaire**	**Binaire**	
		Un seul assembleur de niveau 1	Deux assembleurs de niveau 1
Unaire			
Binaire			
			

<u>Légende</u> : les « points » représentent les assembleurs (le sommet de chaque arbre correspond à l'assembleur de niveau 2) et les « traits » les places ouvertes par chaque assembleur. Les extrémités des « traits » représentent donc les feuilles de l'arbre, pouvant être des lettres ou des nombres. Nous avons choisi de ne pas les représenter explicitement.

ANNEXE 6 – PROGRAMME OFFICIEL DE MATHEMATIQUES – CLASSE DE 4EME (EN VIGUEUR EN MAI 2002)

ANNEXE 7 – PROGRAMME OFFICIEL DE MATHEMATIQUES – CLASSE DE 2NDE (EN VIGUEUR EN MAI 2002)

ANNEXE 8 – LA QUESTION DE LA GENERATION DE FAMILLES DE SITUATION (PROJET *LINGOT*)